

ВШ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА
: курс: **Введение в профессиональную
деятельность**

«математика и компьютерные науки»

«математическое обеспечение и администрирование
информационных систем»

ТЕМА 2. МАТЕМАТИКА КАК МЕТАФОРА

ЛЕКЦИЯ 6: МОДАЛЬНАЯ ЛОГИКА ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛЬНОСТИ

29.10.2025

- Что обсуждали на прошлой лекции
- Введение к лекции Идеи и Гипотезы
- Физическая vs информационная реальность: вычислимость и перечислимость понятий
- Заключение

В. Кандинский, 1910 «Без названия»



Объяснение относительно ... !?

....при рассмотрении множества
объектов необходимо выделять
свойства, которые оказываются
инвариантными к проводимым
операциям преобразования

(Марков А.А., Теория алгорифмов.,
1954)

математическая модель, может быть как удачной, так и неудачной ...то есть не отражающей знания об исследуемом явлении.

Information: the difference that makes the difference

«Информация – это различие, которое имеет значение».

- Итак, язык математики состоит из **различных знаков** операций (умножения, сложения и т.д.), знаков равенства, скобок, переменных.
- К. Гёдель определил набор знаков и построил с их помощью **алгоритм нумерации**, который сопоставил каждому формальному объекту (символу, математической формуле, высказыванию, доказательству **уникальный номер – число Геделя** указывающая **позицию символа на некой бесконечной ленте «истинных знаний»**).



Следствие
теоремы Геделя:
любая
арифметическая
система либо
неполна, либо
противоречива

Парадокс Банаха-Тарского:

Трёхмерный шар равносоставлен двум своим копиям

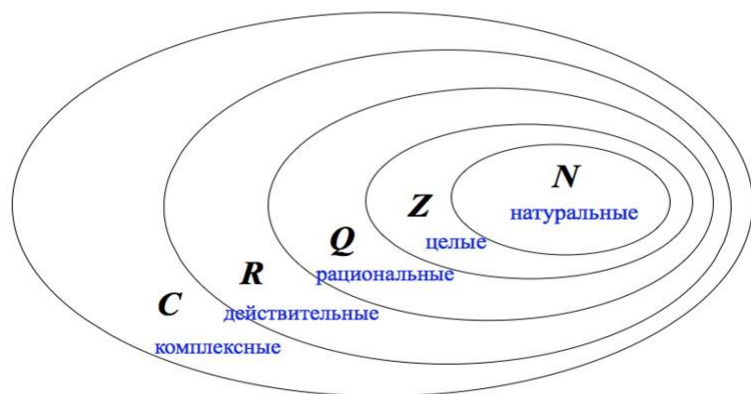


Математика – это искусство давать разным вещам одно название

А. Пуанкаре

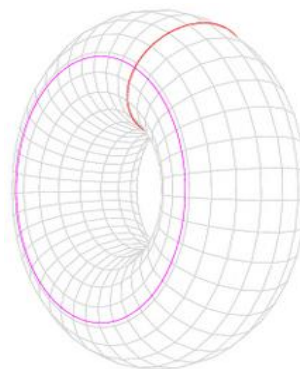
Смысл аксиомы Архимед:

в Природе нет бесконечно малых и. бесконечно больших чисел..

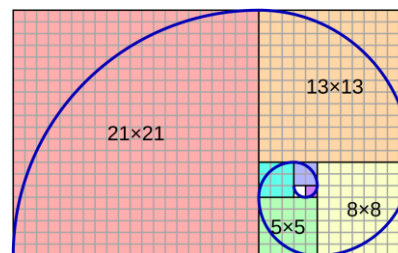


Вопрос

- Можно ли **СМЫСЛ** высказывания (математического, лингвистического) выразить (натуральным N числом, вещественным числом, вектором, матрицей, графом, тензором, числом Геделя, числом Фибоначчи, числом Бетти, числом Бернулли.... ?



Для тора **первое число Бетти** равно $b_1 = 2$, что интуитивно можно представить как количество круглых «отверстий»



числа Фибоначчи:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 и 21.

НЕ ВСЯ ФИЗИЧЕСКАЯ РЕАЛЬНОСТЬ ПЕРЕЧИСЛИМА И «СЛЕДУЕТ» ЗАКОНУ УВЕЛИЧЕНИЯ ЭНТРОПИИ



В изолированной физической системе энтропия либо **остаётся неизменной**, либо возрастает в неравновесных процессах, достигая максимума при установлении термодинамического равновесия (**закон возрастания энтропии**)

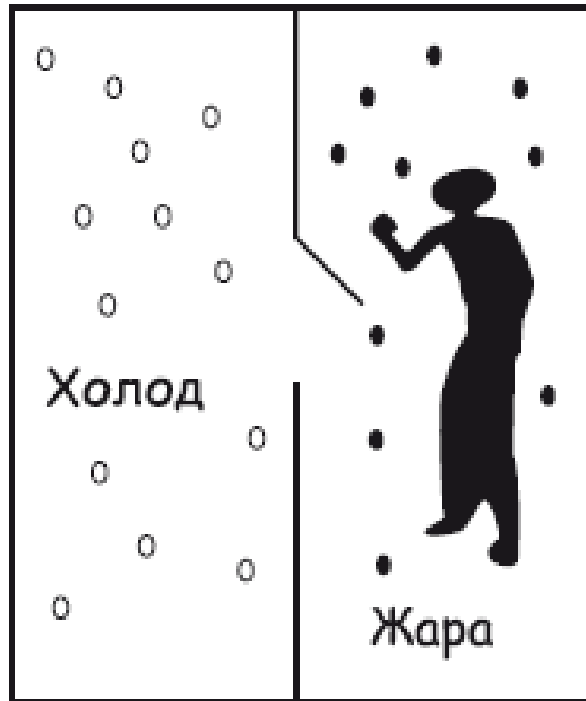
Математика и физика по разному представляет **целостный объект** через единство (непротиворечивость) и обратимость отдельных частей.



Вопрос: почему и как мозг распознает целое быстрее, чем отдельные составляющие, из которых «собирается» объект ?



ЧТО ЖЕ (ИЛИ «КТО») РАБОТАЕТ ПРОТИВ ЭНТРОПИИ ?



Демон Максвелла — это
символ осознания в
бессознательной системе

Логические законы: краеугольный камень
«антиэнтропийного» мышления ?

Информация согласно теории К. Шеннона - **мера уменьшения неопределенности**, непосредственно связанная с передачей сообщения, которое уменьшает **количество равновероятных состояний наблюдаемой системы**. Таким образом, поступление информации (сообщения) в систему – приводит к уменьшению ее энтропии:

$$\Delta I = -\Delta S$$

Соответственно, для системы с конечным количеством состояний (частей) или степеней свободы можно сформулировать новый фундаментальный закон

$$|I| + |S| = \textit{const}$$

Величина константы в этой формуле определяется внутренней структурой рассматриваемой **физической системы**.

Итак: основа физического описания : закон возрастания энтропии
(но так происходит не всегда ?»)

Основа «понимания» мира: закон следования $X \rightarrow Y$ (из X следует Y)

$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ - **СИМВОЛЫ-СВЯЗКИ:** «отрицания», «и», «или», «следования»

Понимание подразумевает, что между X и Y есть логическая СВЯЗЬ (импликация), то есть:

что X является **достаточным** для Y (X **ВЛЕЧЕТ** Y),

что Y является **необходимым** для X (Y **ВЫТЕКАЕТ** из X).

логический «закон»:

если X истинно, то ОБЯЗАТЕЛЬНО должно быть истинным Y :

НЕВОЗМОЖНО, чтобы X было истинным, а Y ложным.

(но высказывание «формирует» человек и так происходит не всегда ?)



Конструкция AND возвращает 1 (истина) когда оба входных операнда равны 1, во всех остальных случаях возвращается 0 (ложь).

Примеры:

$$1 \text{ AND } 1 = 1$$

$$1 \text{ AND } 0 = 0$$

$$0 \text{ AND } 1 = 0$$

$$0 \text{ AND } 0 = 0$$

Конструкция NOT возвращает обратное значение операнда.

Примеры:

$$\text{NOT } 1 = 0$$

$$\text{NOT } 0 = 1$$

Конструкция OR возвращает 1 (истина) когда один из входных операндов равен 1, в случае когда оба операнда равны нулю возвращается 0 (ложь).

Примеры:

$$1 \text{ OR } 1 = 1$$

$$1 \text{ OR } 0 = 1$$

$$0 \text{ OR } 1 = 1$$

$$0 \text{ OR } 0 = 0$$

Закон исключения третьего:

Из двух противоречащих суждений одно истинно, другое ложно, а третьего не дано.

$$A \vee \bar{A} = 1$$

принцип исключения третьего: среди двух высказываний, одно из которых является отрицанием другого, всегда имеется истинное высказывание



ПОЛИТЕХ

УТВЕРЖДЕНИЯ В ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ (ЛВ) ПРЕДСТАВЛЯЮТСЯ ФОРМУЛАМИ.

- из ложности **отрицания** некоторого суждения нельзя делать вывод об **истинности** этого суждения

Закон асимметрии истины и лжи..

Формула: *“Если есть солнце и нет ветра, то будет жара”*.

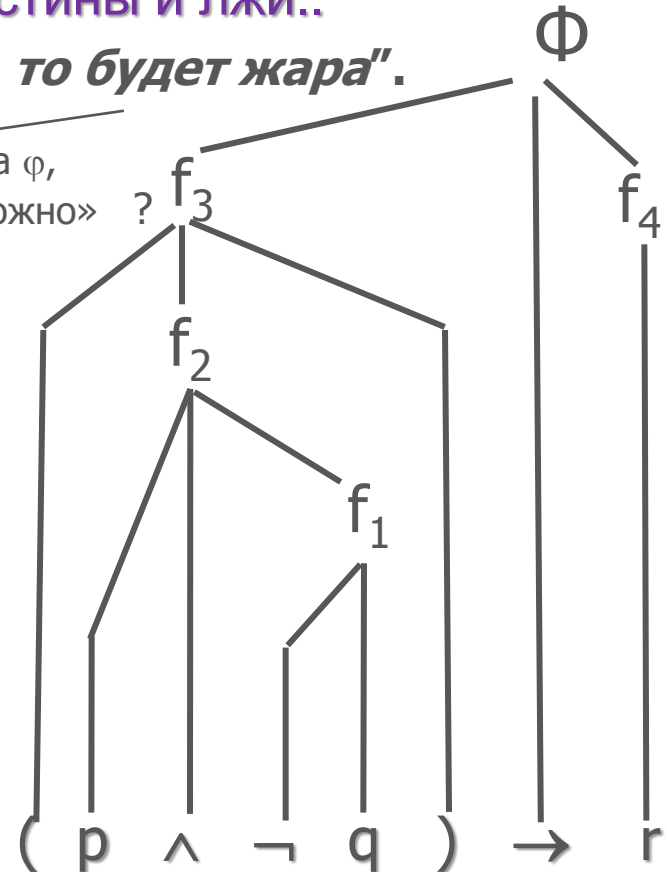
$\Phi = (p \wedge \neg q) \rightarrow r$

Истина ли формула Φ ,
если p «истина», а q «ложно»

$\varphi ::= p \mid \neg \varphi \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi)$

- «Атом» в формуле ЛВ представляет конкретный факт.
- Факт может быть или его может не быть в реальности.

$\Phi = 1$ (истина) на интерпретации
 $\langle p=1, q=0, r=1 \rangle$





ПАРАДОКСЫ ЛОГИЧЕСКОГО СЛЕДОВАНИЯ

Итак, имеет место неадекватность формулы $A \rightarrow B$ (или $A \supset B$) для выражения отношения "А влечет В", **когда факты А и В друг с другом не связаны.**

Поэтому в отношение **логического следования фактов А и В** необходимо добавить отношения "возможно" и "необходимо":

$$'A \text{ логически влечет } B' \equiv 'A \rightarrow B'$$

при условии, что

истинность В и ложность А вместе сосуществовать не могут.

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

НЕВОЗМОЖНО!

Грамматика «логики высказываний» (ЛВ):

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \vee \varphi)$$

Пример формулы ЛВ:
 $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$

Грамматика «модальной логики» (МЛ):

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \vee \varphi) \mid []\varphi$$

Примеры формул МЛ:

$$[]p \rightarrow \Diamond q, []p \rightarrow [][]p$$

$[]$ – «необходимо»

$\Diamond$ – «ВОЗМОЖНО»

Если p «необходимо», то q – «возможно»

Модальная логика – это множество формул, в котором кроме **логических** связок $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ и т.п., есть **две новые связки**: **модальности** $[]$ и $\Diamond$.

Утверждения в ЛВ и МЛ представляются формулами.

$$\Phi = (p_1 \wedge \neg p_2) \rightarrow p_3$$

Формула Φ классической логики высказываний принимает значение 'И' либо 'Л' на конкретной интерпретации – модели окружающего мира, на конкретном наборе 'И' либо 'Л' значений атомов. (*"Если солнце и нет ветра, то будет жара"*).

$$F = [](p_1 \rightarrow \Diamond p_2)$$

Значение И/Л **модальной формулы** F зависит не только от истинностных значений входящих атомов, но и **от контекста.**

А число контекстов **бесконечно!**

Атом в логической формуле представляет конкретный факт. Если $p=И$, то соответствующий факт имеет место (**истинен**).

$[]\varphi \rightarrow \varphi$ из «необходимо» φ следует φ

В области **знаний** (**эпистемическая** логика (логика знаний)):

ДА!

– Если я **знаю**, что Саша любит Машу, то Саша любит Машу.

для эпистемической логики это **аксиома**

В области **времени** (**темпоральная** логика (логика времени)):

ДА!

– Если я **всегда** буду любить Катю, то я **и сейчас** люблю Катю.

для темпоральной логики это **аксиома** (будущее включает настоящее)

В области **законов и норм** (**деонтическая** логика):

НЕТ !

– Если студенты **обязаны** посещать лекции, то они посещают лекции

для деонтической логики это **НЕ аксиома** (истинность формулы не может зависеть от хотелок студентов!).



ПОЛИТЕХ

ПРОВЕРКА ИСТИННОСТИ МОДАЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ

Как проверить выполнимость модальной формулы?

$$F = \Diamond[] p \wedge \Diamond q$$

Для определения истинности F нужно определить истинности модальных формул $[]p$ и $\Diamond q$.

Как определить истинностное значение формулы $[]\phi$, если истинностное значение формулы ϕ известно?

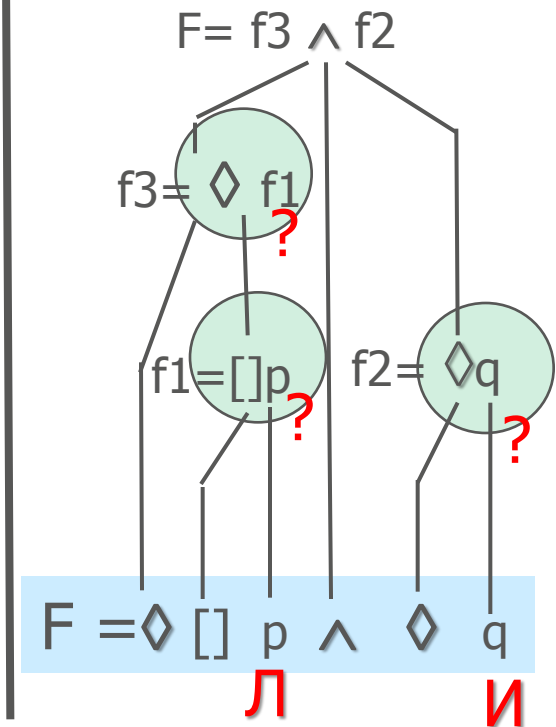
Истинностное значение модальных формул

$$[]p \text{ и } \Diamond q$$

зависит не только от истинностных значений атомов, но и от ситуации, от КОНТЕКСТА.

Но ситуации разные и их бесконечное число!

Структура формулы F
(синтаксическое дерево)

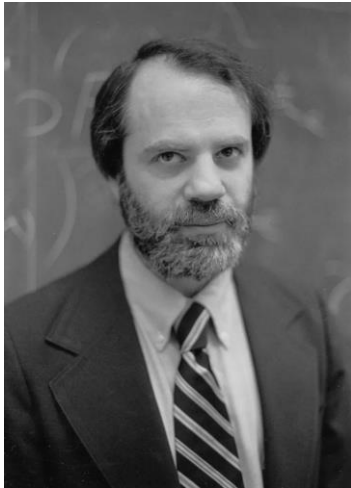




ПОЛИТЕХ

«Картина мира» Лейбница как множество «возможные миры»

Понятие «возможные миры» восходит к Г. Лейбницу:



С. Крипке
1940-1922

*"Все существующее в мире можно рассматривать как **реализацию** актуализированной сейчас одной из бесчисленного **множества мыслимых возможностей**"*

«возможное состояние (возможная история) мира» это «контрфактическая ситуация», описываемая формулами модальной логики



1646-1716

Лейбниц считал, что **мыслимые** Богом **возможные миры**, согласованы с "истинами разума", законами математики и логики, лежащими в основе всего мироздания.

Поэтому **законы логики и математики** выполняются во всех возможных мирах. Обычные же факты выполняются только в некоторых возможных мирах.

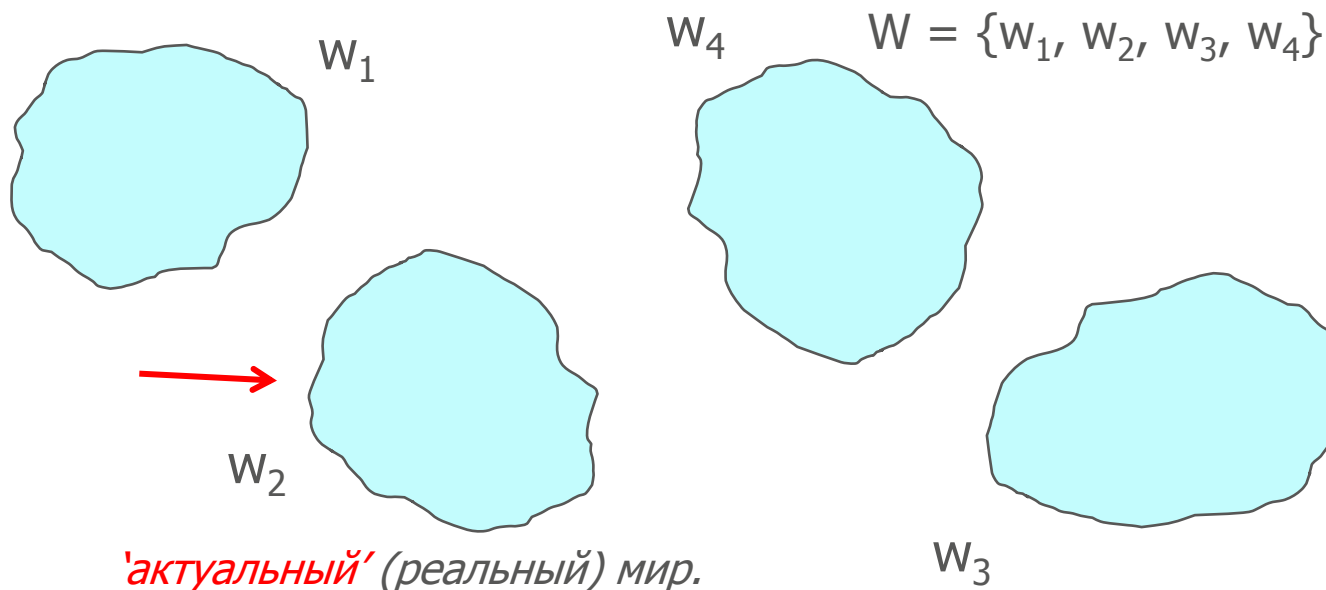
Имеется две модальности для характеристики истины :

- **необходимость**
- **возможность:**

“необходимая истина” выполняется **во всех возможных** мирах
(*истина разума*),

“возможная истина” выполняется **в некоторых возможных** мирах
(*“истина случайного факта”*).

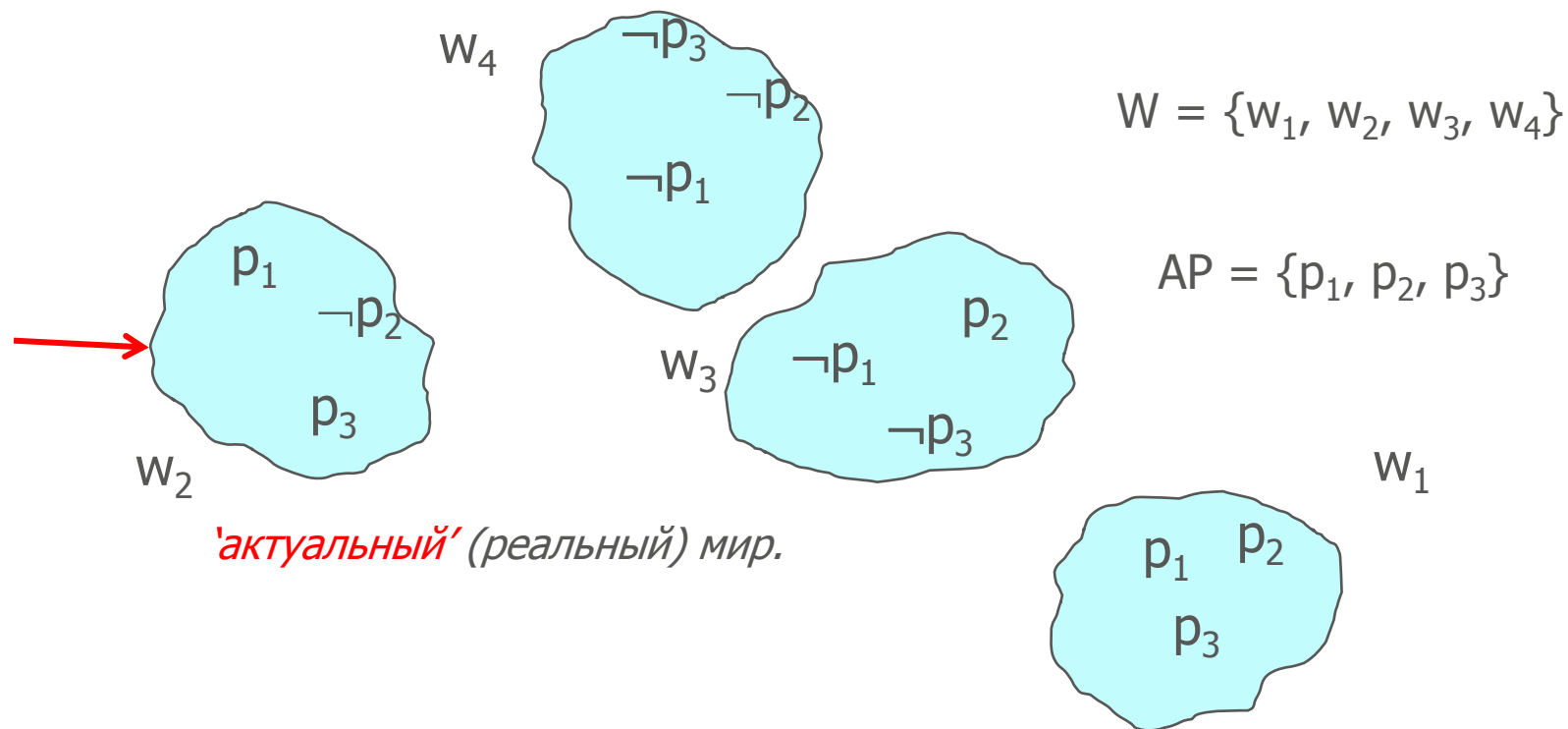
ИДЕЯ СЕМАНТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С. КРИПКЕ:



Все возможные ситуации, адекватные рассматриваемой проблеме, можно
ПРЕДСТАВИТЬ **ЯВНО** как **'возможные миры'**.

В основе семантики возможных миров лежит способность человека размышлять над ходом жизни, представлять развитие различных событий и ситуаций, конструировать возможное положение дел в будущем и, оглядываясь назад, моделировать иной исход уже свершившихся событий.

ВОЗМОЖНЫЕ МИРЫ ПРЕДСТАВЛЯЮТСЯ С ПОМОЩЬЮ «ФАКТОВ»

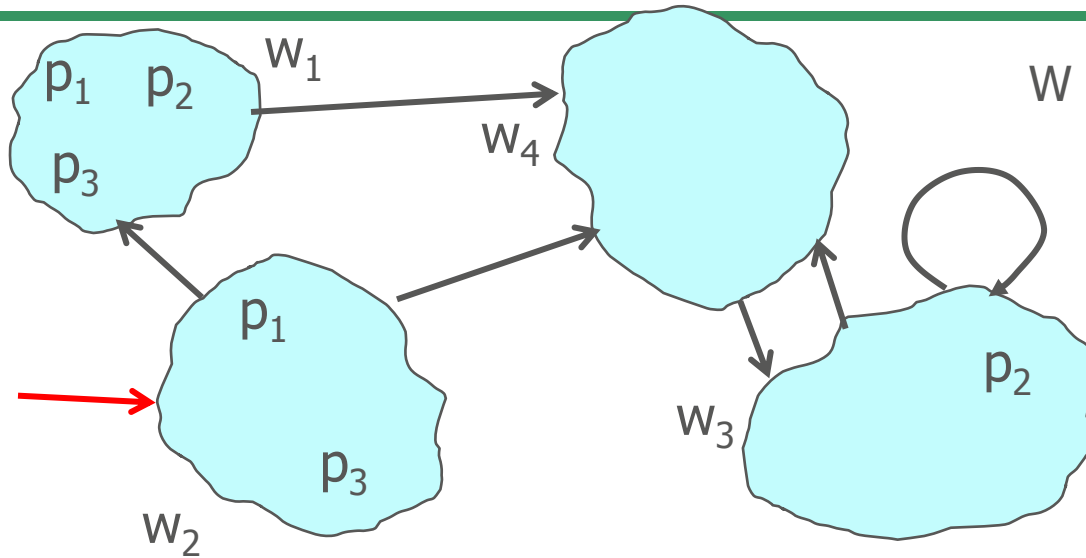


Факты представляются множеством «атомов» - переменных имеющих значение «истина» или «ложна» . В конкретном возможном «мире» (ситуации) атом-факт может быть истинным, а в другой – ложным!



ПОЛИТЕХ

В СЕМАНТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С. КРИПКЕ ВСЕ ВОЗМОЖНЫЕ СИТУАЦИИ ПРЕДСТАВИТЬ ЯВНО – КАК ВОЗМОЖНЫЕ



$$W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$$

$$AP = \{p_1, p_2, p_3\}$$

$$L(w_1) = \{p_1, p_2, p_3\};$$

$$L(w_2) = \{p_1, p_3\};$$

$$L(w_3) = \{p_2\};$$

$$L(w_4) = \{ \}$$

$$R = \{ (w_1, w_4), (w_2, w_1), (w_2, w_4), (w_3, w_4), (w_3, w_3), (w_4, w_3) \}$$

актуальный' (реальный) мир.

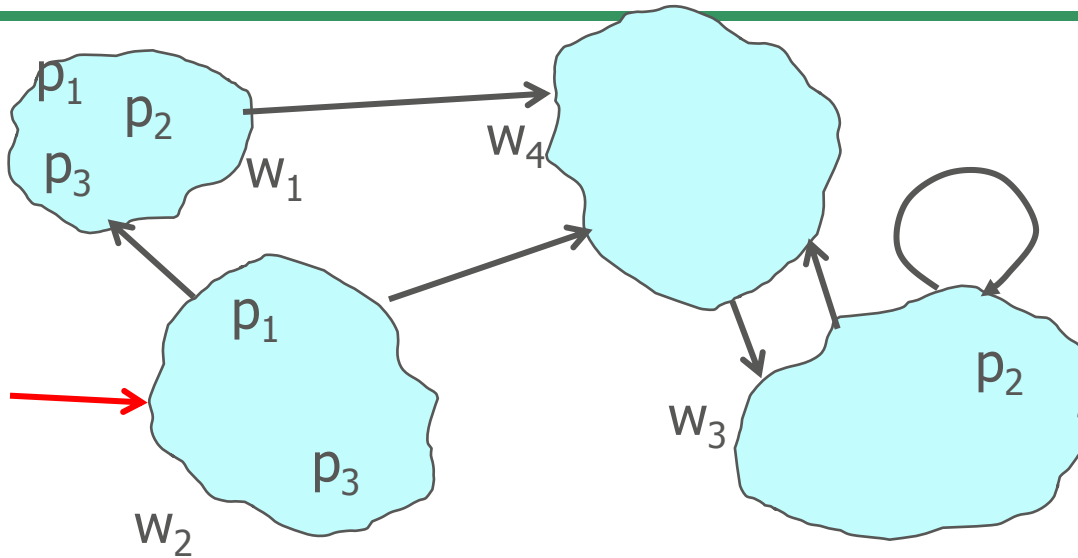
в каждом мире показаны только истинные атомы.

Миры (ситуации) можно связать : определив бинарное отношение $R \subseteq W^2$.



ПОЛИТЕХ

ОТНОШЕНИЕ ДОСТИЖИМОСТИ СТРУКТУРЫ КРИПКЕ $R \subseteq W^2$



$$AP = \{p_1, p_2, p_3\}$$

$$L(w_1) = \{p_1, p_2, p_3\};$$

$$L(w_2) = \{p_1, p_3\};$$

$$L(w_3) = \{p_2\};$$

$$L(w_4) = \{ \}$$

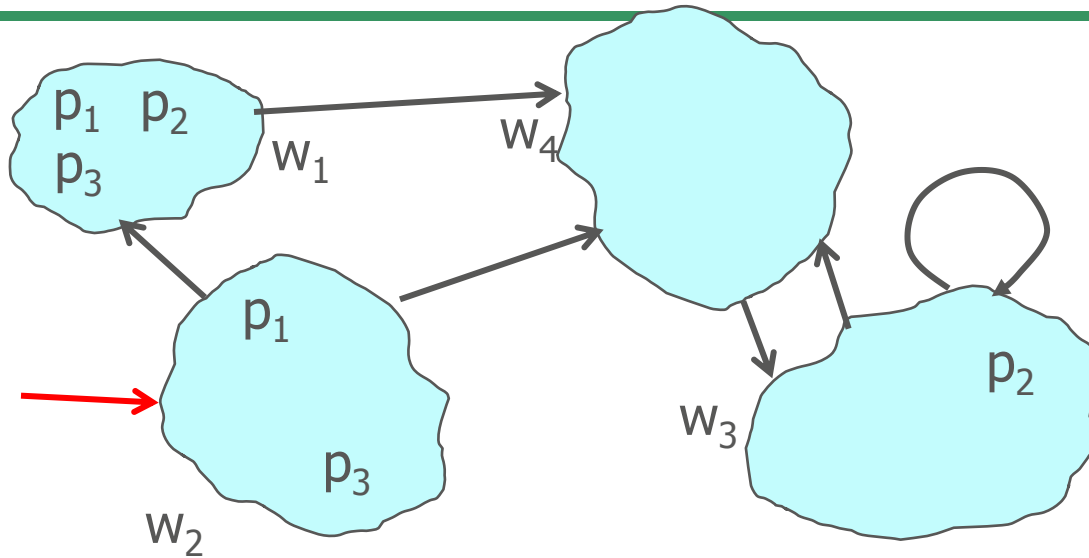
$$R = \{ (w_1, w_4), (w_2, w_1), \\ (w_2, w_4), (w_3, w_4), \\ (w_3, w_3), (w_4, w_3) \}$$

В мире w мир w' является "*ДОСТИЖИМЫМ*" ("видимым") для w , если из w в w' идет ребро: $(w, w') \in R$ или wRw' (*достижимость - за один шаг*).



ПОЛИТЕХ

Для «ВОЗМОЖНЫХ МИРОВ» МОЖНО ЗАДАТЬ ОТНОШЕНИЕ ДОСТИЖИМОСТИ НА СТРУКТУРЕ $R \subseteq W^2$



$$W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$$

$$AP = \{p_1, p_2, p_3\}$$

$$L(w_1) = \{p_1, p_2, p_3\};$$

$$L(w_2) = \{p_1, p_3\};$$

$$L(w_3) = \{p_2\};$$

$$L(w_4) = \{ \}$$

$$R = \{ (w_1, w_4), (w_2, w_1), (w_2, w_4), (w_3, w_4), (w_3, w_3), (w_4, w_3) \}$$

В мире w мир w' является "*достижимым*" ("видимым") для w , если из w в w' идет ребро: $(w, w') \in R$ или wRw' (*достижимость - за один шаг*).

Утверждения φ' , истинные в мире w' , *достижимом* из мира w ,

необходимы для оценки значения истинности *модальной формулы*

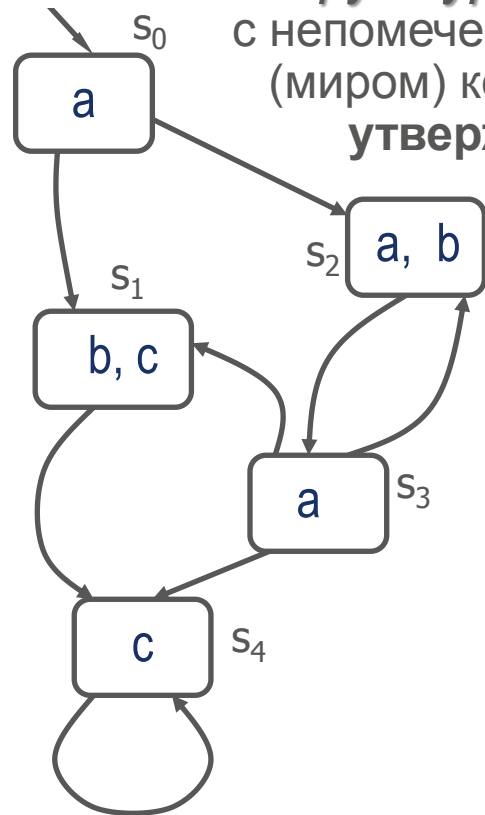
в мире w , если *она* включает модальности бокс $[]$ или ромб $\Diamond$.



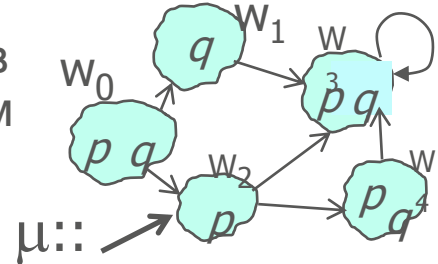
ПОЛИТЕХ

ФОРМАЛЬНАЯ СЕМАНТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИК

$M::$



Структура Крипке – конечная система переходов с непомеченными переходами, с каждым состоянием (миром) которой **связано множество атомарных утверждений**, истинных в этом состоянии.



Структура Крипке формально - ориентированный граф с помеченными вершинами (мирами).

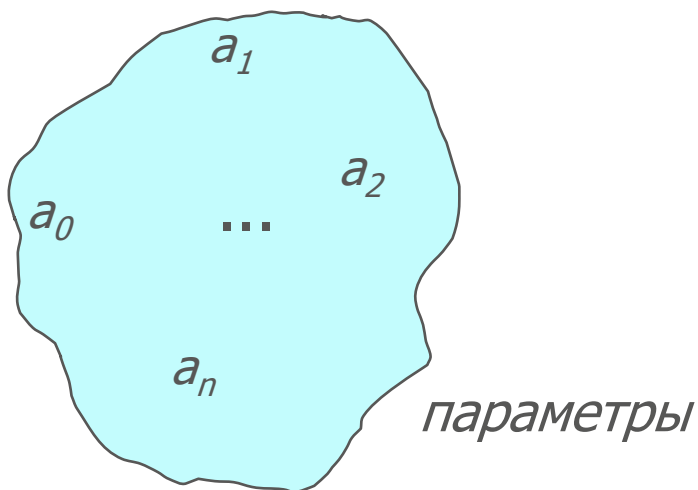
Формально: $M = (W, AP, R, L)$, где:

- W – множество состояний (возможных миров)
- W_0 - множество начальных состояний
- AP – множество атомарных утверждений
- $L: W \rightarrow 2^{AP}$ – функция пометок
- $R \subseteq W \times W$ – бинарное отношение 'достижимости' на множестве миров

Структуру Крипке это описание в котором состояния (возможные миры) помечены отдельными «атомами» – именами фактов, истинных в этих мирах.

ОПЕРАТОРА $\Box$ И КВАНТОРА ВСЕОБЩНОСТИ $\forall$ БИНАРНОЙ ЛОГИКИ

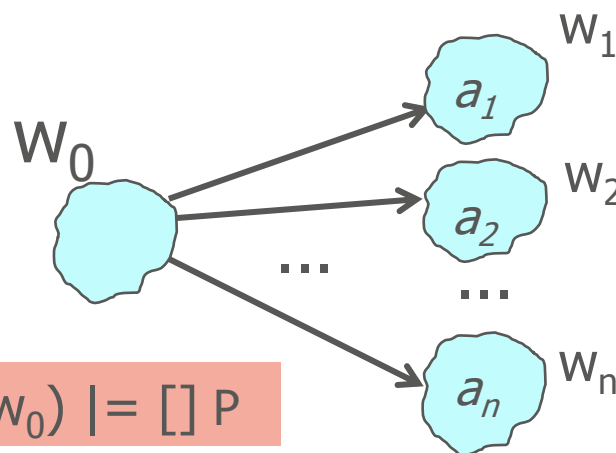
- Семантика квантора $\forall$ бинарной логики предикатов



Универсум

$(\forall a \in A) P(a)$ истинна, если для всех $a_i \in A, P(a_i) = И$

- Семантика оператора $\Box$ модальной логики



$(M, w_0) \models \Box P$

$\Box P$ выполняется в мире w_0 структуры Крипке M , если **во всех мирах** $w_i \in W$, **ДОСТИЖИМЫХ** из w_0 , P истинно в w_i

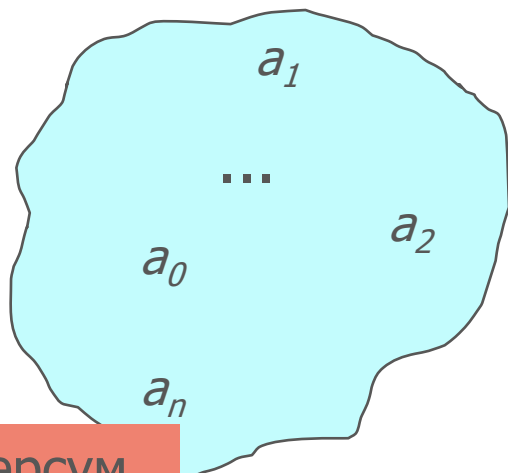
- Модальный оператор $\Box$ можно рассматривать как АНАЛОГ квантора $\forall$. $\Box P$ означает $(\forall w \in W) P$, где квантор берется по всем мирам (ситуациям, состояниям, моментам времени и т.п.), достижимым из w_0 .



ПОЛИТЕХ

ОПЕРАТОРА 'РОМБ' $\Diamond$ И КВАНТОРА СУЩЕСТВОВАНИЯ $\exists$ БИНАРНОЙ ЛОГИКИ

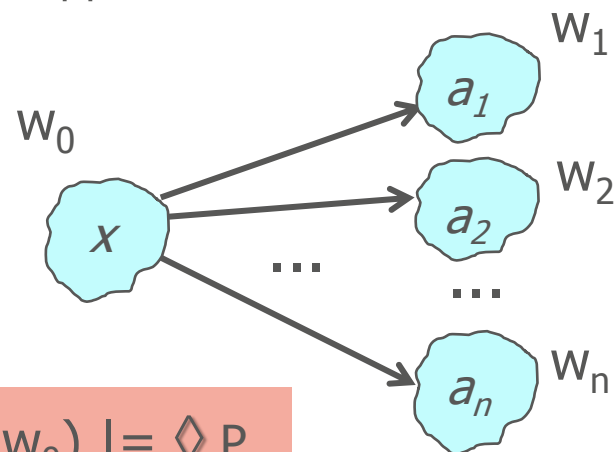
- Семантика квантора $\exists$ бинарной логики предикатов



Универсум

$(\exists a \in A) P(a)$ истинно, если существует такое $a_i \in A$, что $P(a_i)$ **ИСТИННО**

- Семантика оператора $\Diamond$ модальной логики



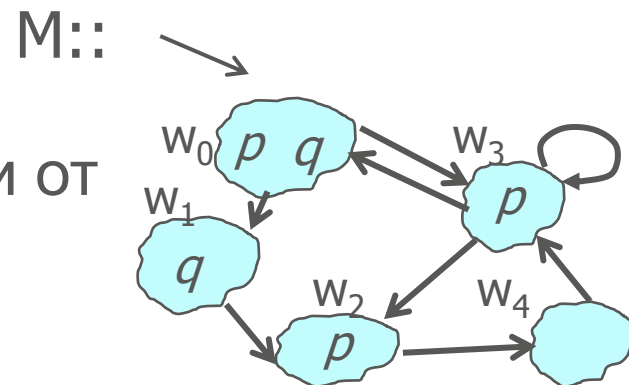
$(M, w_0) \models \Diamond P$

$\Diamond P$ истинно в мире w_0 структуры Крипке M , если **существует такой мир** $w_i \in W$, **ДОСТИЖИМЫЙ** из w_0 , что P истинно в w_i

- Модальный оператор $\Diamond$ можно рассматривать как АНАЛОГ квантора $\exists$ логики предикатов: $\Diamond P$ означает $(\exists w \in W)P$.

Возможные миры Крипке, в зависимости от задачи, могут рассматриваться, как:

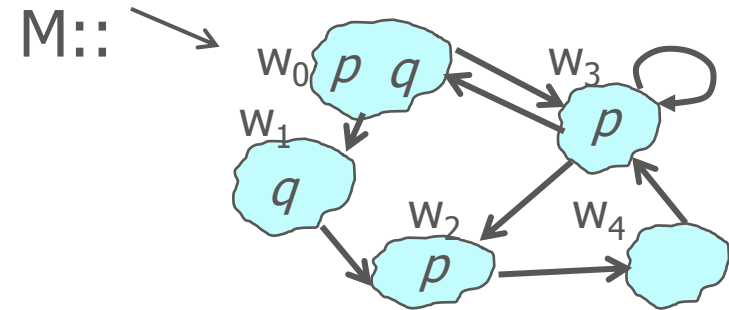
- возможные жизненные ситуации;
- возможные положения дел;
- возможные состояния динамической системы;
- позиции на шахматной доске;
- мгновенные состояния системы в моменты времени;
- метафизические возможные миры;
- возможные миры научной фантастики
- состояния памяти компьютера;
- варианты раздачи карт в карточной игре;
-





Отношение достижимости структуры $R \subseteq W^2$

- Отношение достижимости структуры Крипке при различных интерпретациях возможных миров может представлять:
 - *информационное отношение между ситуациями – что агент может видеть (знать);*
 - *отношение между моментами времени (шаги времени);*
 - *родственные отношения между людьми;*
 - *отношение соседства точек пространства;*
 - *отношение переходов в геометрической интерпретации машинных диаграмм или процессных графов;*
 - *...*





ЗАДАНИЯ, КОТОРЫЕ БУДУТ НА ЭКЗАМЕНЕ

- Проверьте выполнение данной модальной формулы во всех мирах заданной структуры Крипке М.

Примеры модальных формул:

а) $\Diamond [] (\varphi \ \& \ \psi);$

б) $[] \Diamond (a \ \& \ b);$

в) $\Diamond [] \Diamond (a \vee b).$