

ВШ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

курс: Введение в профессиональную деятельность

ТЕМА 2. МАТЕМАТИКА КАК МЕТАФОРА

ЛЕКЦИЯ 8 : *ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК :*

«ЧИСЛА И СМЫСЛЫ»

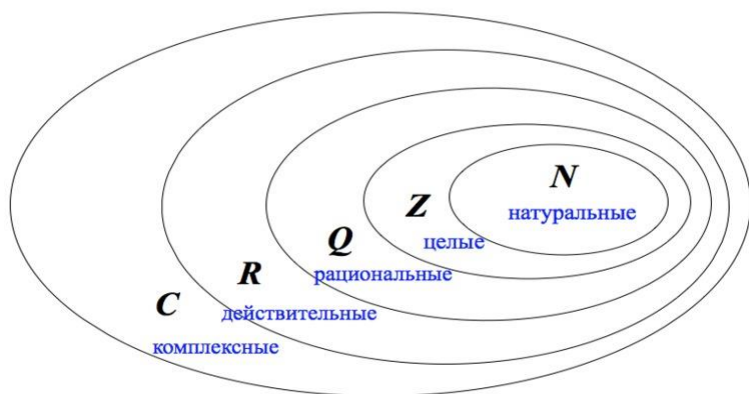
27 марта
2025

Математика – это искусство давать разным вещам одно название

А. Пуанкаре

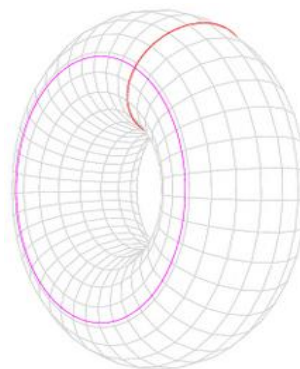
Смысл аксиомы Архимед:

в Природе нет бесконечно малых и. бесконечно больших чисел..

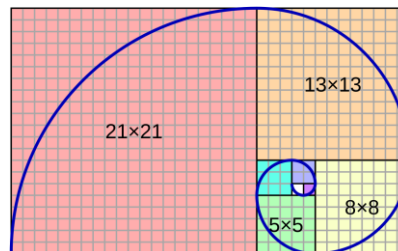


Вопрос

- Можно ли **смысл** высказывания (математического, лингвистического) выразить (натуральным N числом, вещественным числом, вектором, матрицей, графом, тензором, числом Геделя, числом Фибоначчи, числом Бетти, числом Бернулли.... ?



Для тора **первое число Бетти** равно $b_1 = 2$, что интуитивно можно представить как количество круглых «отверстий»



числа Фибоначчи:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 и 21.

- Что обсуждали на прошлой лекции
- Введение к лекции 9
- Идеи и Гипотезы
- Вычислимость и Перечислимость
- Заключение

- Итак, язык математики состоит из **различных знаков** операций (умножения, сложения и т.д.), знаков равенства, скобок, переменных.
- К. Гёдель определил набор знаков и построил с их помощью **алгоритм нумерации**, который сопоставил каждому формальному объекту (символу, математической формуле, высказыванию, доказательству **уникальный номер – число Геделя** указывающая **позицию символа на некой бесконечной ленте «истинных знаний»**.
- Идею ленты как части вычислительной машины использовали Алан Тьюринг («машина Тьюринга»).
- Нумерация Геделя – **есть специальный инструмент**, который позволил доказать, что любая арифметическая система **либо полна, либо непротиворечива**.

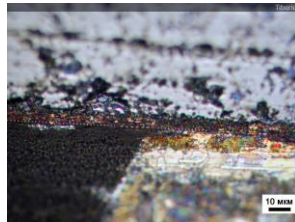
•

- Числа Геделя принадлежать **подмножеству множества натуральных чисел $\mathbb{N}$** .
- Каждому числу, входящему в нумерацию Геделя, отвечает **«правильная» программа или функция, которая вычисляет это «число Геделя»**.
- Можно считать, что «неправильные» программы, которые не входят в нумерацию Геделя, вычисляют **нигде не определенные функции**.

- Все фундаментальные принципы, доказательства математики и компьютерные программы – суть **высказывания на некотором языке**
- Аргументация Геделя: Каждому высказыванию (каждой программе на некотором языке программирования) можно поставить в соответствие число **и наоборот.**
- Итак: .
 - алгоритм нумерации Геделя **каждому символу сопоставит цифру в k-ичной системе счисления.**
 - программа — это последовательность символов, поэтому её можно считать записью **некоторого числа в k-ичной системе счисления.**

Основания: В замкнутой физической среде наблюдаются естественные «самопротекающие» процессы, направляющие состояния материальных объектов и систем к состояниям с минимальным значением полной потенциальной энергии.

№1: *physical systems are effectively physical computers*



Вопрос: Можно ли *использовать* «самопротекающие» физические процессы в качестве процессов решения некоторой задачи (вычисления) ?

Гипотеза:

- **№2** Вычисления – суть процессы в физических системах, направленные в сторону состояния с минимальной энтропией
- **№3:** Программа вычислений – суть формальное исчисление, используемое для описания вычислителя как физической системы, которая достигает состояния минимальной энтропии

Математика это искусство
давать разным вещам одно название

А. Пуанкаре

Пример

- Арифметика (сложение, умножения чисел)
- Векторная алгебра (конечномерное сложение векторов)
- Функции (бесконечномерные вектора)
- Алгебра Ли (операция коммутирования)

Современное понимание формальные исчисления - это среда (пространство «операционного» кодирования- символов и операций), где выполняются операции над абстракциями (операции реализует человек)

Понимание (теоретический минимум) формального исчисления с точки зрения компьютерных наук — процесс выполнения операций как над самими абстракциями, так и смыслами текстов, составленных из этих абстракций.

Задание , выполнение которого гарантирует «отлично» на экзамене:

написать программу «квайн», которая печатает саму себя - (квайн, [англ. quine](#)) — [компьютерная программа](#), которая выдаёт на выходе точную копию своего [исходного текста](#). Куайны . Следствие [теоремы Клини о рекурсии](#)

ИСКУССТВО ОБЪЯСНЕНИЯ VS ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Используя «аргументацию Геделя» можно утверждать :

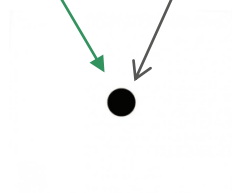
- фраза на русском языке: «два плюс два равно четыре» использует k различных символов. Каждому используемому символу можно сопоставить некоторую цифру в k-ичной системе счисления (исчислении).
- Поскольку любая программа вычисления — это последовательность символов, следовательно, программу можно считать записью некоторого числа в непозиционной k-ичной системе счисления.

Вопрос: есть ли смысл числа 'e' в формуле Эйлера: «число 'e' в степени i, умноженного на число пи равно минус единице»....
(“...есть ли математический аналог фразы — «быть или не быть»)

Какой смысл использовать троичную систему счисления $\{-1, 0, 1\}$, а не $0, 1, 2$. Есть: представления отрицательных чисел сильно упрощается:

10-1 это 8, а -101 это -8, где минус — это не знак, а часть цифры
!!!

Можно ли из нульмерных объектов (точек),,, построить не нульмерный протяженный объект, например **отрезок** конечной длины?

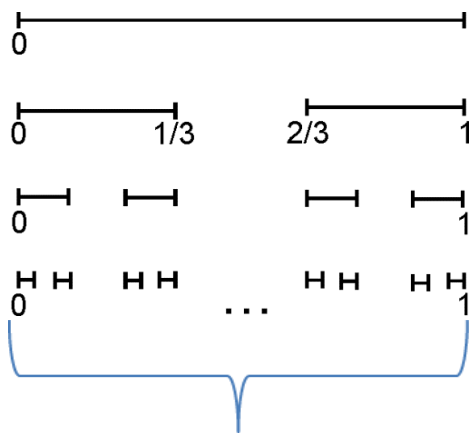


Точка –
множество
меры ноль

когда:

$0 * \text{'бесконечность'} = 1$???

Пример: числа Фибоначчи самореферентны - определяются суммированием двух предыдущих членов ряда
но... начальные значения должны быть заданы

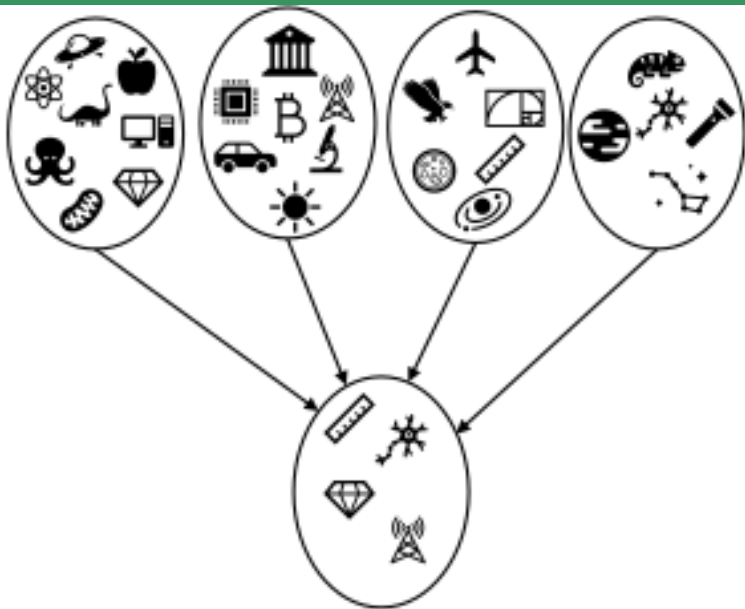


«Под числом я подразумеваю не столько набор единиц, сколько абстрактное отношение некоторой величины к другой величине того же вида, которую мы принимаем за единицу».

И. Ньютон

Канторово множество счётное объединение объектов **меры 0**

АКСИОМА ВЫБОРА, АС (AXIOM OF CHOICE)

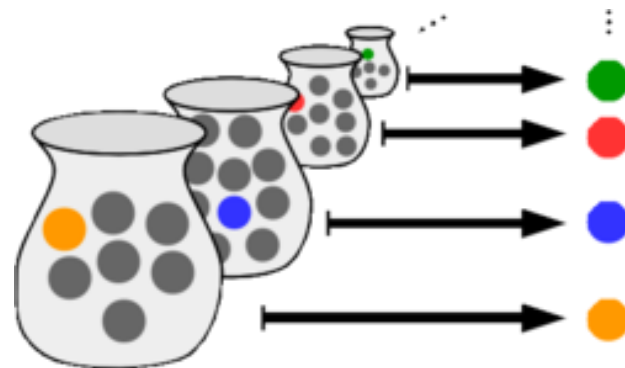
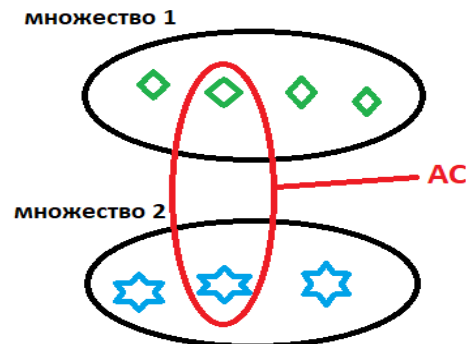


С помощью **Аксиомы выбора** можно разобрать любое множество на (по) элементам. Очевидно, что конечное или **счетное множество** (например, множество натуральных чисел) можно разобрать на элементы, но для **континуума** такая операция практически не реализуема.

Аксиома выбора (АС) -

имеет простую и логичную формулировку, но с «чудовищные» последствия.

Формулировка аксиомы: если существуют два непустых множества, **то существует и множество**, содержащее ровно по одному элементу из обоих:



АКСИОМА ВЫБОРА - «ГЕНЕРАТОР ПАРАДОКСОВ»

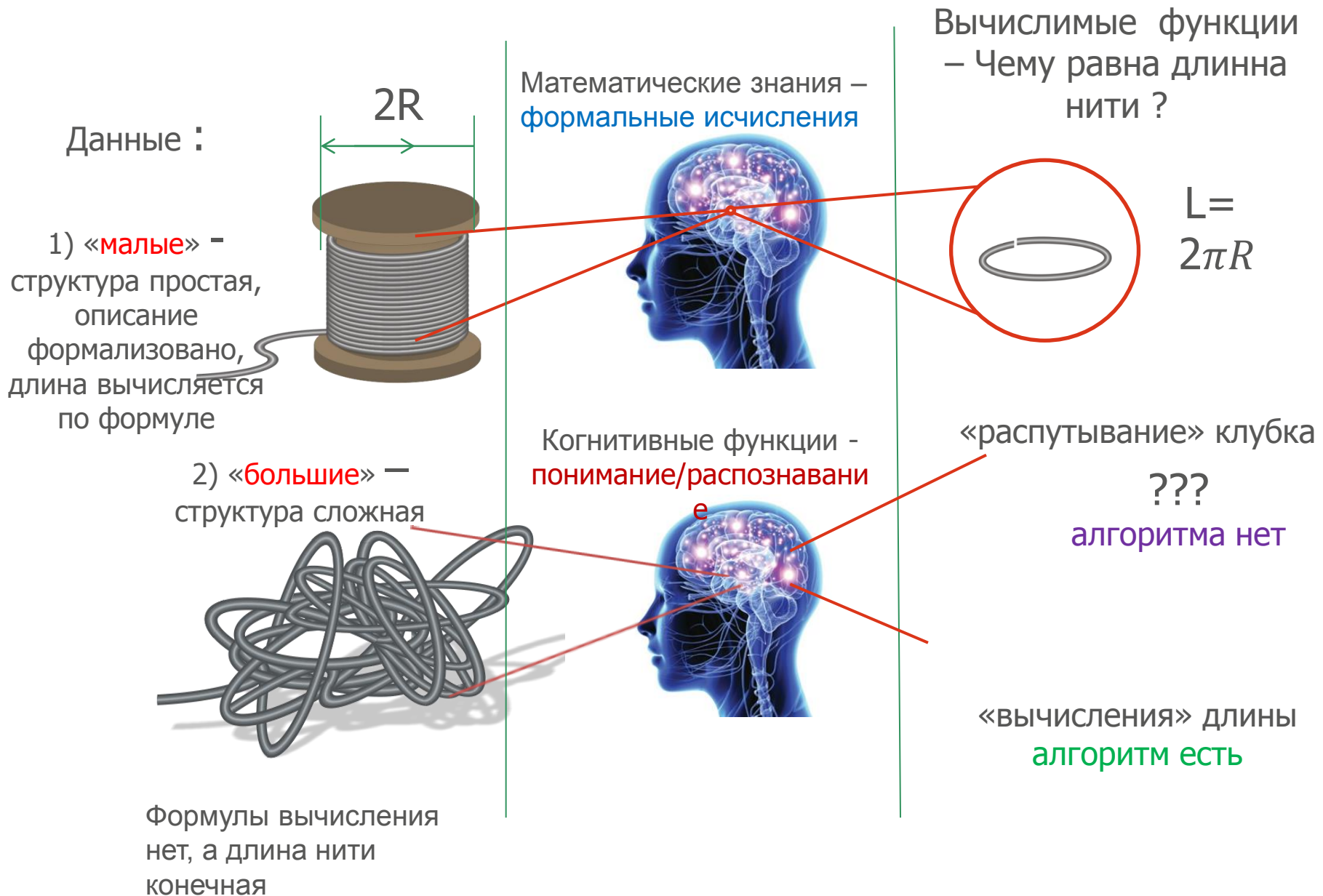
Аксиома Выбора рождает математических «чудовищ» - объектов, существование которых может быть **формально доказано**, но ни один конкретный пример их существования не может быть **приведен**.

$$\forall \alpha \exists f (\forall \beta (\beta \in \alpha \wedge \beta \neq \emptyset) \Rightarrow f(\beta) \in \beta)$$

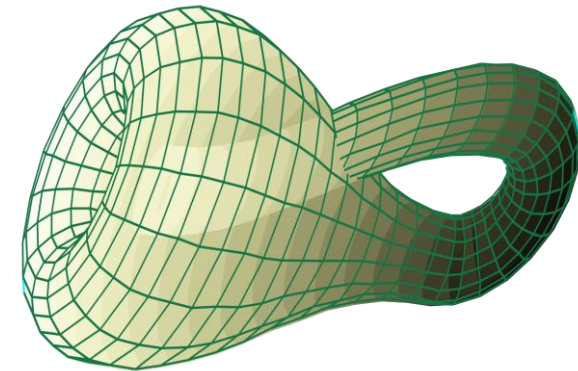
АС «простыми словами»:

декартово произведение (пересечение) набора непустых множеств непусто. То есть при наличии любой «коллекции» множеств, каждое из которых содержит хотя бы один элемент, можно создать новое множество, с помощью функции (алгоритма) выбрав по одному элементу из каждого набора, даже если коллекция бесконечна.

«Вычислимость» за гранью формальных определений:



«Большие» данные реальности : множества множеств



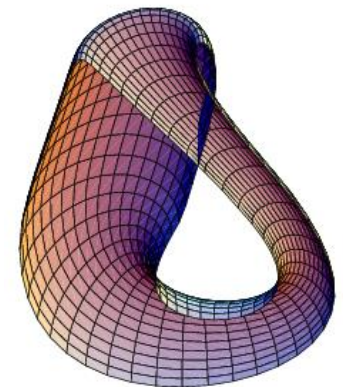
бутылка Клейна
в трехмерном
пространстве D^3

Воспринимаемое многообразие физических данных $L^3T^1 \rightarrow D^4$
«длина x ширина x глубина x текущее время»

Многообразие когнитивных функций $L^3T^3 \rightarrow D^6$

«длина x ширина x глубина x прошлое x настоящее x будущее»

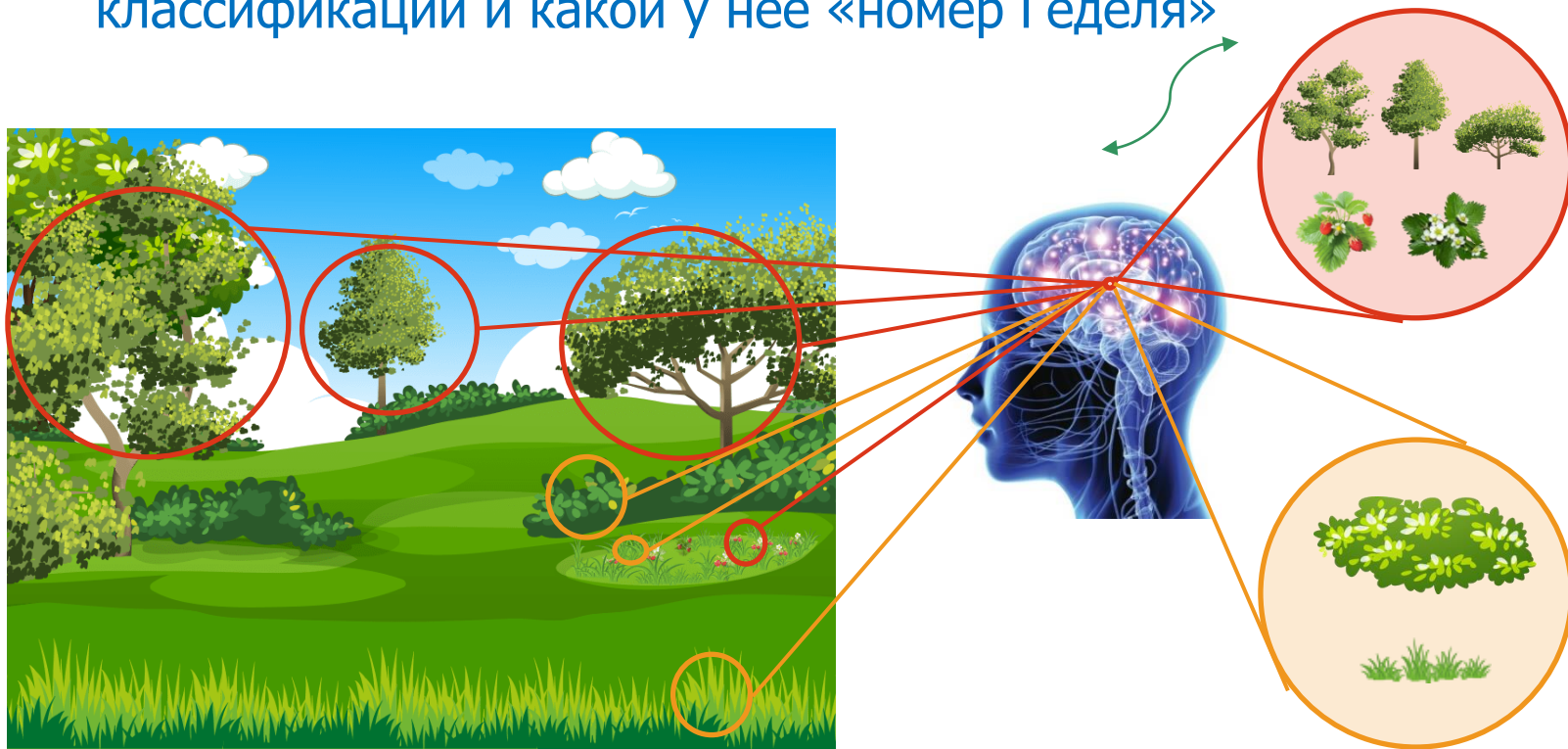
Гипотеза №4: D^4 можно вложить в D^6



Рассечение
бутылки – лист
Мебиуса

Специальная вычислимая функция «когнитивное» восприятие (классификация с пониманием):

Как формально построить такую функцию
классификации и какой у нее «номер Геделя»



Фундаментальный вопрос КН: возможна ли формализация воспринимаемого физического «пространства» -, которая позволяет построить **вычислимые и обратимые функции классификации** (само-осознания: число Геделя -> понятие) ?

Проблема полноты: Может ли разум объяснить самого себя.

Гипотеза «когнитивной замкнутости» — это **гипотеза №5** о том, что человеческий разум как вычислитель конституционально способен эффективно решать лишь определенные проблемы (классификация решается лучше, чем вычисления), но способен к «обучению» и обретению новых знаний....

- **Гипотеза №5** следует расширенной трактовке теоремы Геделя о неполноте следует:
 - **«возможности разума (системы когнитивного исчисления), способного непротиворечиво (единственным образом) объяснить (смоделировать) самого себя, ЯВЛЯЮТ логическое противоречие... что порождает «неполноту» и неспособность разума объяснить самого себя**
- Современная наука пока не может предложить объяснение воплощения «интеллекта» (информации) в его «носителе» (мозге), но теоретически такое объяснение ... **ВОЗМОЖНО**.

«ВСЕЛЕННАЯ» ГЕДЕЛЯ КАК МНОГООБРАЗИЕ ВЫЧИСЛИМЫХ ФУНКЦИЙ - НОСИТЕЛЕЙ СМЫСЛОВ

- Вселенная Гёделя, обозначаемая L , — это особый класс множеств, который можно полностью описать с помощью более простых множеств, то есть L — объединение конструктивной иерархии подмножеств L_{α} .
- Была описана Куртом Гёделем в статье 1938 года «Согласованность аксиомы выбора и обобщенной гипотезы континуума».
- **Вывод:** аксиома выбора и обобщенная гипотеза континуума верны в конструируемой вселенной с нумерацией Гёделя

Вселенную L можно рассматривать как частный вид «вселенной фон Неймана» V

Все этапы построения L индексируются порядковыми номерами Геделя.

Во «вселенной фон Неймана» V на этапе $\alpha+1$ имеем $V_{\alpha+1}$ — это набор всех подмножеств предыдущего этапа V_{α} .

В конструктивной «вселенной Гёделя» L используются только те подмножества предыдущего этапа, которые: определяются формулой на формальном языке теории множеств с параметрами предыдущего этапа

- **кардиналом в теории множеств** называется объект, который характеризует **мощность** (число элементов) **множества**.
- обозначение **мощности** $n(A)$. Конечные **множества** легко сравнивать по **мощности**. Если $n(A) = n(B)$, то конечные **множества** A и B равномощны.

Например:

- **мощность множества** $A = \{1; 3; 5; 7\}$ равна $n(A) = 4$.
- **мощность множества** $B = \{-3; 13; 2; 4\}$ равна $n(B) = 4$.

Значит, множества A и B **равномощны**.

- **Мощность множества** $E = \{5, 5, 5, 5, 5\}$ равна $n(E) = 1$

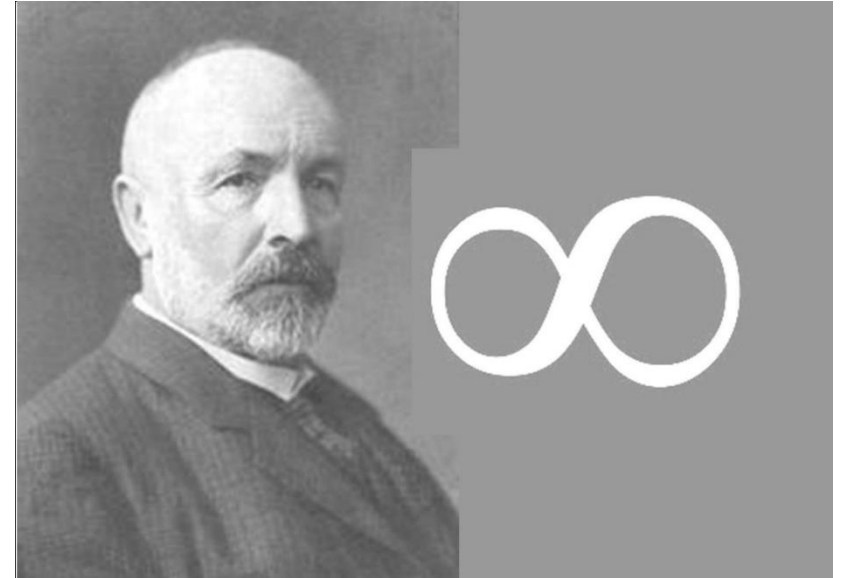
Итак: концепция понятий **бесконечности**, **нуля** и **единицы** идеологически далека от интуиции математического анализа ...но

Георг Кантор (родился:

- 1845 года, Санкт-Петербург, Россия, умер 1918, Германия)

В легендарной публикации *On a Property of the Collection of All Real Algebraic Numbers* доказал, что множество вещественных чисел «более многочисленно», чем множество алгебраических чисел.

Кантор впервые показал, что существуют бесконечные множества разных размеров



«Множество — это большое количество, которое позволяет воспринимать себя как одно» — Георг Кантор

Сколько чисел есть между 0 и 1?

- множество всех вещественных алгебраических чисел является *бесконечным счётным множеством*
- Трансцендентные числа : в *любом* замкнутом интервале $[a,b]$ существует *хотя бы* одно трансцендентное число, которое никогда нельзя будет подсчитать в бесконечном счётном множестве. Поскольку одно такое число существует, то в семействе вещественных чисел существует бесконечное количество трансцендентных чисел.

ОНТОЛОГИЯ КН КАК МЕТАМАТЕМАТИКИ - ОТ ЧЕГО ТО НАДО «ОТКАЗАТЬСЯ»: ОТ ВЕЛИЧИНЫ ИЛИ СМЫСЛА ?

- **Идея метаматематики** как абстрактного «многообразия величин» понятий, которые объясняют понятия».
- Например: если некоторое «событие» уже произошло (воплощено), то с точки зрения «ситуации» оно принадлежит не «непрерывному бытию», но лишь «некоторому абстрактному «многообразию величин».
- Идею эту следует понимать буквально: **онтология** как исчисление оказывается **состоятельной** только лишь запрещая **«смысл события»**.

$$\delta \in \gamma \Rightarrow \exists \beta: \beta \in \alpha \wedge f(\beta) = \delta.$$

$$f(\beta) \in \beta$$

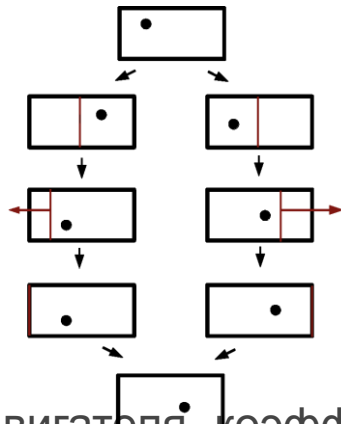
Числа существуют, являя себя через воплощение объектов реальности

Онтология- это представление о том, что реально существует

- МетаМатематику как язык математики надо согласовать с физической реальностью, как с «носителем» этого языка.
- Принцип гласит, что в любой вычислительной системе, независимо от её архитектуры и физической реализации, **потеря 1 бита информации** неизбежно сопровождается увеличением энтропии самой вычислительной системы или окружающей среды.
- В более узком понимании, принцип Ландауэра утверждает, что при стирании (уничтожении) 1 бита информации вычислительной системой потребляется теплота в количестве по крайней мере W джоулей: $W = k_B T \ln 2$, где k_B — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура изотермического процесса
- Иными словами: потеря одного бита информации (невозможность вычислить функцию классификации) требует по меньшей мере $W = k_B T \ln 2$ Джоулей энергии.

ОТНОШЕНИЕ «ЗАПИСЬ/СТИРАНИЕ» ИНФОРМАЦИИ

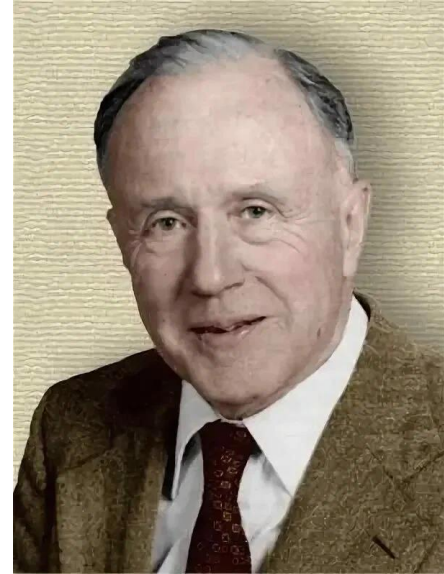
- Запись и уничтожение одного бита информации не **симметричны во времени и энергии**. Запись одного бита может требовать и меньшего количества энергии и времени.
- Принцип Ландауэра иллюстрируется «молекулярным» тепловым двигателем,



- Для такого двигателя коэффициент полезного действия, в точности совпадающий с кпд макроскопической тепловой машины, тем самым иллюстрируя «отрицательный» смысл теоремы Карно: **кпд цикла Карно не зависит от рабочего тела, использованного тепловым двигателем**,

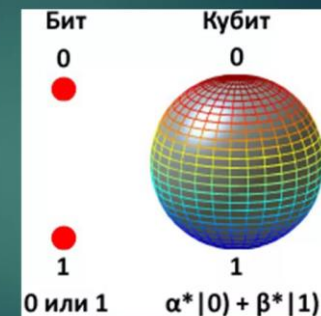
Вопрос: от чего зависит к.п.д. компьютере как тепловой машины

- концептуальная позиция Д. А. Уилера, афористически сводящуюся к **“it from bit”**.
- Д. Уилер аргументировал идею , что все фундаментальные для естествознания явления и объекты, такие как частицы и поля, имеют **информационную природу**, хотя лучше бы написать **“it from qubit”**.



Кубит

Квантовый разряд или наименьший элемент для хранения информации в квантовом компьютере. Как и бит, кубит допускает два собственных состояния, 0 и 1, но в отличие от бита он находится сразу в 2 состояниях.



- «любая физическая частица, сила или поле, и даже сам пространственно-временной континуум **черпают свои смысл и существование** (иногда опосредованно) в так или иначе оформленных (**вычислимых**) ответах «да» или «нет» на вопросы, поставленные наблюдателем (исследователем)...
- Поэтому « то, что мы понимаем под реальностью возникает из вопросов, адресуемых нами Природе, на которые возможны ответы «да» или «нет». (а теперь мы теперь можем адресовать вопросы Deep Seek)
- Таким, образом Дж. Уильер считал, что **основой любого (мыслимого) физического объекта служит информация**
- А принцип Ландауэра устанавливает **связь между информацией и энергией (энергия суть масс $E=mc^2$), — базовыми представлениями физики, включая максимальная скорость выполнения вычислительных операций с — скорость света**

- Некоторые вещи нам непонятны не потому, что понятия наши слабы, а потому что они не входят в круг наших понятий».

Козьма Прутков

- основное ограничение программ (на практике) и алгоритмов (в теории алгоритмов) состоит в самоприменимости:
 - насколько возможны программы, анализирующие и производящие «программы вообще».
- На самом деле эта проблема не только теории алгоритмов и, как следствие, программ.
- Она касается ограниченности и замкнутости любой формальной системы: **никакая формальная система не может содержать полное описание самой себя**. Более точно это сформулировано в теоремах Гёделя о неполноте:

Примем без доказательств как дополнение к гипотезам :

- **Теорема 1.** В любой замкнутой формальной системе (теории) существует верная формула (утверждение), не доказуемая в этой теории.
- **Теорема 2.** Формула (утверждение), выражающая непротиворечивость теории, не может быть доказана в этой теории: то есть любая теория не может содержать непротиворечивое (полное) описание самой себя.