ИНСТИТУТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК И ТЕХНОЛОГИЙ

ВШ ИСКУСТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

курс: Введение в профессиональную деятельность

ТЕМА 2. МАТЕМАТИКА КАК МЕТАФОРА

ЛЕКЦИЯ 8 : *ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК :*

«ПОНЯТЬ НЕЛЬЗЯ ВЫЧИСЛИТЬ»

20/25 марта
2025

ПОЛИТЕХ

ПРЕАМБУЛА

Знание немногих принципов освобождает от знания многих фактов.

Р. Декарт

Люди избавились бы от половины своих заблуждений, если бы смогли договориться **о значении слов.**

Скорость обучения ИИ превосходит скорость обучения человека

статья

"Невыносимая медлительность бытия: почему мы живем со скоростью 10 бит/с?" анализирует фундаментальные ограничения человеческого мышления и эволюции ментальных процессов.

Современные ИИ-системы могут выполнять триллионы операций в секунду, находя решения с использованием информационных принципов в «мире битов» гораздо быстрее, чем при использовании физических принципов в «мире атомов»,

Содержание

- Что обсуждали на прошлой лекции
  - неизмеримое
  - невычислимое
  - необъяснимое

- Введение к лекции 8
  - как можно объяснить, что 0=1/2 ???

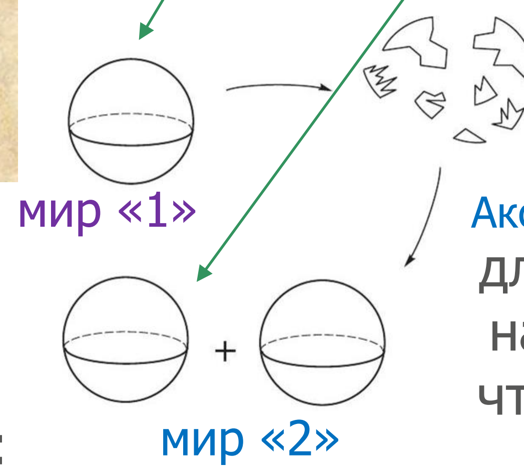
- Идеи и базовые принципы
- От нумерации Геделя к машине Тьюринга
- Фундаментальные принципы, «числовая» аргументация Геделя и тезис Черча

- Заключение

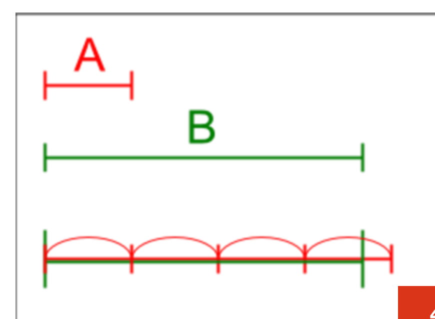
ПОЛИТЕХ

НА ПРОШЛОЙ ЛЕКЦИИ ОБСУЖДАЛИ

1) Возможен ли переход из мира «1» в мир «2» через «неизмеримое» множество состояний



Аксиома Архимеда
для A < B
найдется n
что n*A > B



2) Принципы физики vs информации:

- измерить

vs

- вычислить ?

0+0+…+0 = ?

ОБСУЖДАЛИ ДИАЛЕКТИКУ ВЫЧИСЛЕНИЙ –
ДИСКРЕТНОЕ (ОПЕРАЦИИ) НАД НЕПРЕРЫВНЫМ (ЧИСЛА)

ПОЛИТЕХ

Сколько будет

к 1 кошке и 2 собакам

прибавить

B: 3 кошки и 1 собаку ?

+

B= 1 кошка и 2 собаки

A= 3 кошки и 1 собака

C= **4 кошки и 3 собаки**

Сколько будет

P: 2 кошки и 1 собакам

увеличить в 3 раза ?

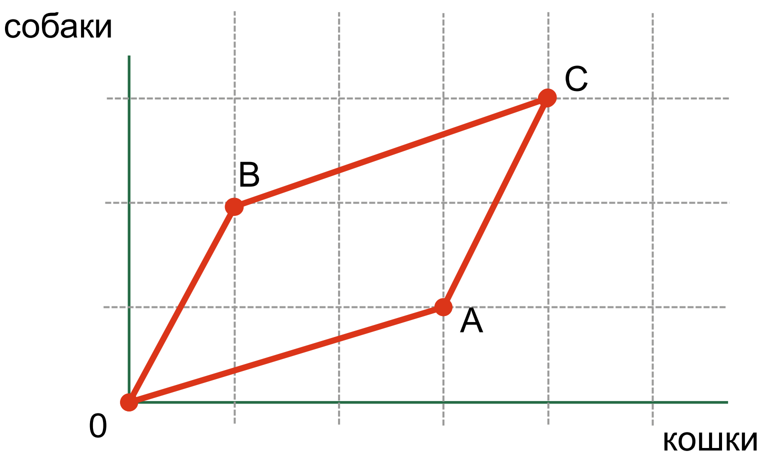
P= 2 кошки и 1 собака

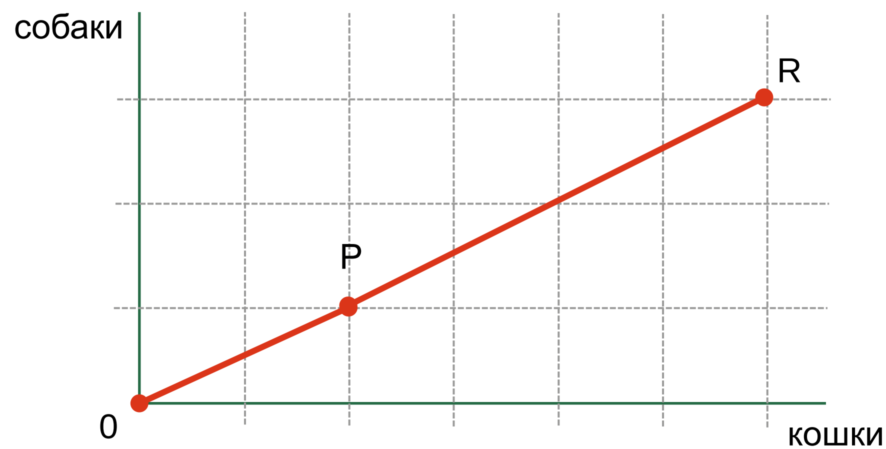
× 3

R= **6 кошек и 3 собаки**

мультфильм: «Козлёнок, который считал до десяти»:

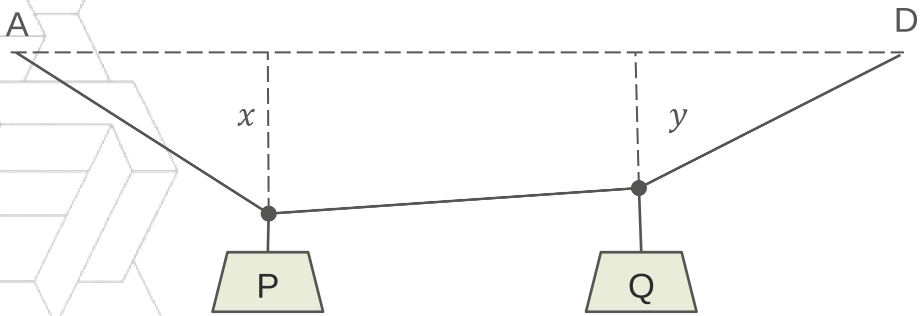
«…один — это я,
два —
это Телёнок,
три —
это Корова.
…..

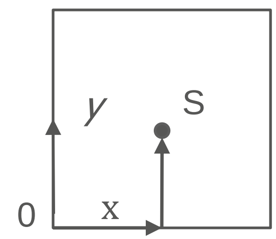




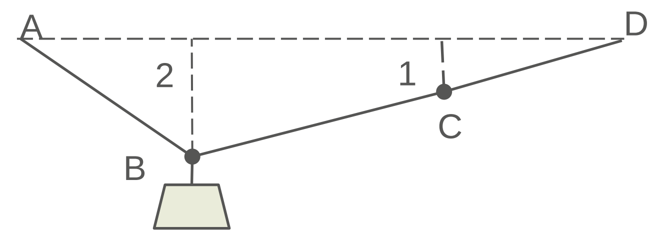
Природному объекту – «группе из собак или кошек» можно сопоставить «непрерывный вектор + набор операций»: сложение векторов операция умножение вектора на число имеет смысл

Пример: струна с двумя грузами под воздействием гравитации





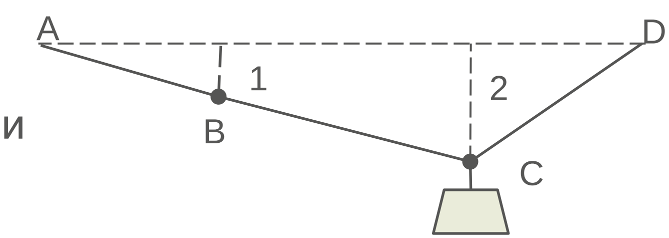
Положение струны S задается на плоскости точкой с координатами S(x,y)



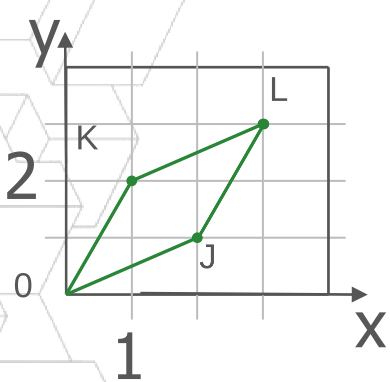
положения	P	Q	x	y
J	1	0	2	1
K	0	1	1	2
L	1	1	3	3

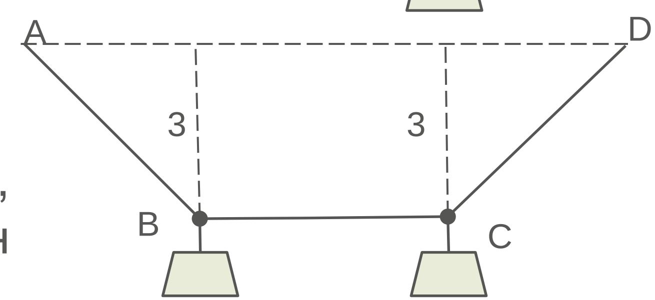
операция

L=J+K



Что будет в ситуации L=5J+3K - ?



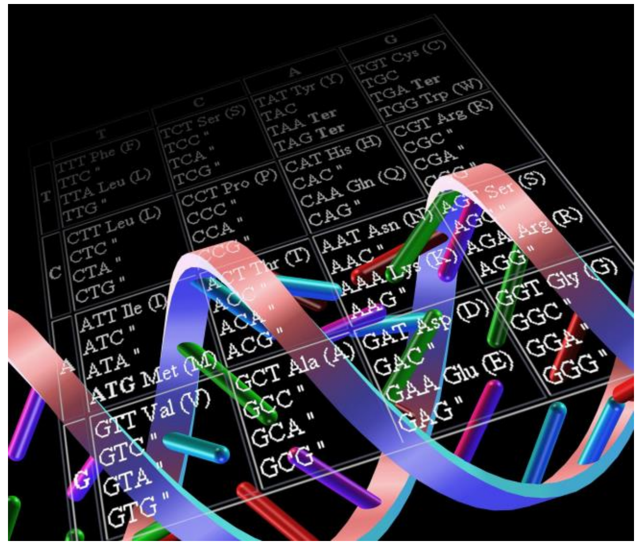


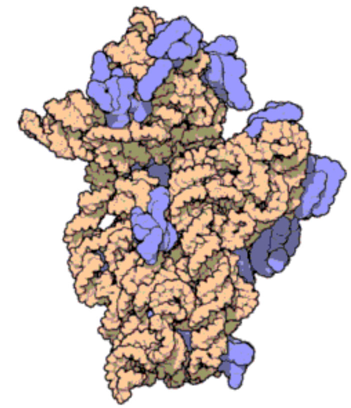
<u>наблюдаемые функции</u> (явления) непрерывные, но число грузов –причин дискретное число

IT FROM BIT : «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ» МАТЕМАТИКА ПРИРОДЫ

Все ли в Природе можно «пересчитать» и «вычислить» ?

Генетический код — символьная форма записи наследственной информации в живой клетке, с помощью 4-х букв.
ДНК код рибосомы используют для «вычисления» различных молекул белков.



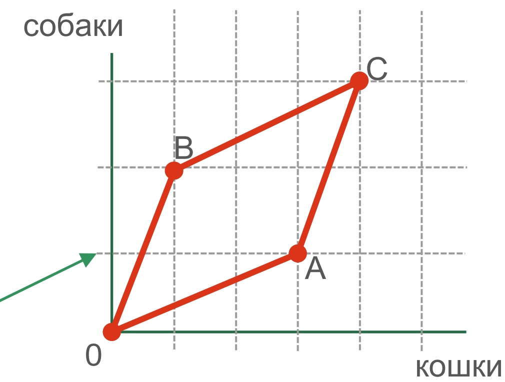


Рибосомы (/ˈraɪbəzoʊm, -soʊm/) — это макромолекулярные машины (обнаружены в 1950 г.), которые находятся во всех клетках и выполняют биологический синтез белка (трансляцию матричной РНК). Рибосомы соединяют аминокислоты в порядке, заданном кодонами молекул матричной РНК, образуя полипептидные цепи

События порождены причинами, которые следуют законам (принципам) Природы, .

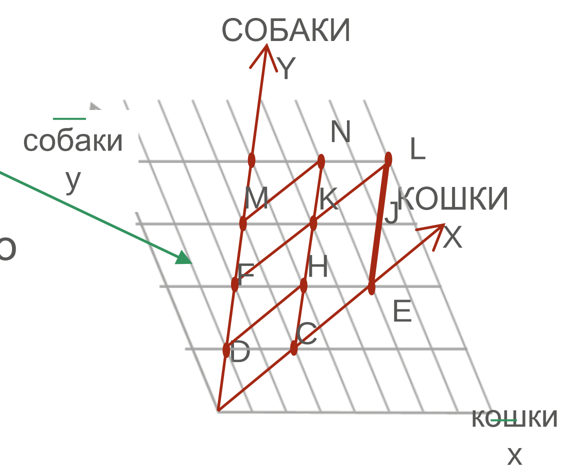
Действия законов Природы на материальныеобъекты можно:

- наблюдать , проводя конечное число физических экспериментов,
- результаты наблюдения можно объяснять, используя конечное число мыслимых «абстракций».
- из абстракций «собирать» модели материальных объектов



Пример 1 алгебра «кошек и собак» - имеет место экспериментальный факт, но для объяснения фактов им надо сопоставить ряд абстракций (понятий) и операций над ними

- векторную модель : системы координат + числа : **натуральные**, простые, целые, рациональные (вес, рост) + операции сложение, умножение ….



Но с помощью математики можно объяснить не само явление (объект), а свойства его математической модели понять – «что»; вычислить – «как»,

Рассмотрим **абстракции: «высказывание» и «объяснение»:**

– **Высказывание:** любая масса имеет связанную с ней энергию, и наоборот. Чтобы этому утверждению путем доказательства может быть присвоено значение истинно или ложно на до понять, что такое масса и как вычислить энергию

– **объяснение** это тоже высказывание, но которое не нуждается в формальном логическом доказательстве истинности или ложности, являясь аналогом понятие «аксиома». Можно ли «объяснение» вычислить ? Например с помощью набора квантовых чисел ….

ПРИМЕР: ВЫСКАЗЫВАНИЕ VS ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЯСНЕНИЯ

Высказывание: истина в том, что **«0=1/2»**

дано выражение : $y=1/(1+x)=1-x+x^2-x^3+x^4\ldots$

Пусть $x=1$, тогда имеем:

$y=1+1-1+1-\ldots..=(1-1)+(1-1)+(1-1)\ldots=0+0+\ldots 0=0$

но $y=1-(1-1)+(1-1)+(1-1)\ldots=1-0=1$

Полученный ряд можно записать и так:

$y=1-(1-1)+(1-1)+(1-1)\ldots=1-y$, тогда $y=1-y$,

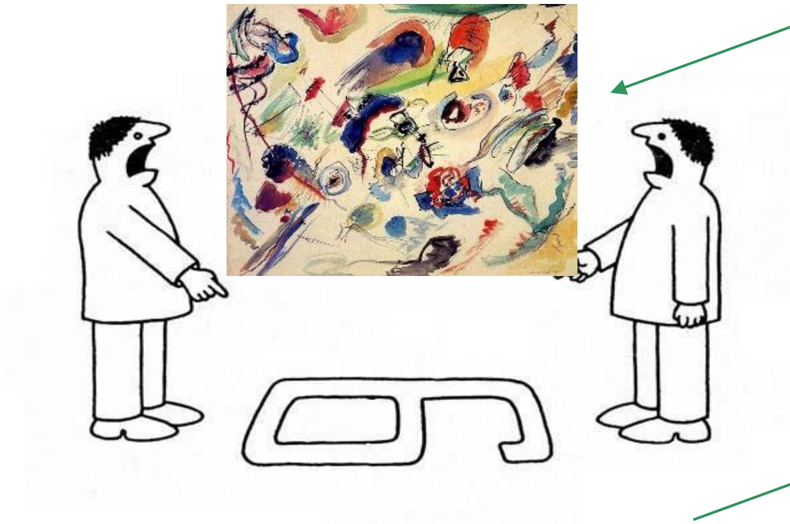
значит **$2*y=1$**, **откуда** **$y=1/2$** ????

…. Объяснение , имеем y=0 и y=1/2, значит «0=1/2» ???

*С другой стороны в записи $y=1+1-1+1-\ldots.$ «0» и «1» –встречаются равновероятно, поэтому их среднее = (1+0)/2=**1/2 ,,,,???***

АБСТРАКЦИИ «МОДЕЛЬ», ПРИРОДА «ИНФОРМАЦИЯ» И «ЗНАНИЙ»

В. Кандинский, 1910 «Без названия»



Объяснение относительно … !?

….при рассмотрении множества объектов необходимо выделять свойства, которые оказываются инвариантными к проводимым **операциям преобразования**

(Марков А.А., Теория алгорифмов., 1954)

математическая модель, может быть как удачной, так и неудачной …то есть не отражающей знания об исследуемом явлении.

Information: the difference that makes the difference

«Информация – это различие, которое имеет значение».

ПОЛИТЕХ

Арабская мудрость. Соломон Ибн Габироль

(~1021—1058)

Существует четыре типа людей:

Те, кто не знают, но уверены, что они знают. $\neg K_x p \wedge K_x K_x p$

Это глупцы – избегай их.

Те, кто не знают и знают, что они не знают. $\neg K_x p \wedge K_x \neg K_x p$

Они простаки – научи их.

Те, кто знают, но не знают, что они знают. $K_x p \wedge \neg K_x K_x p$

Они спят – разбуди их.

Те, кто знают и знают, что они знают. $K_x p \wedge K_x K_x p$

Это мудрецы – следуй за ними.

Существует ли математика Природы?

Применение чисел и арифметических операций не приводит к логическим противоречиям,

а применение диф. и интегрального исчислений,

тем более использование слов, рождает противоречия и неопределенность

Все, что выходит за пределы конечного находятся за пределами человеческого разумения

епископ Дж. Беркли , 1734 г.

Сложность - результат информационного взаимодействия ?

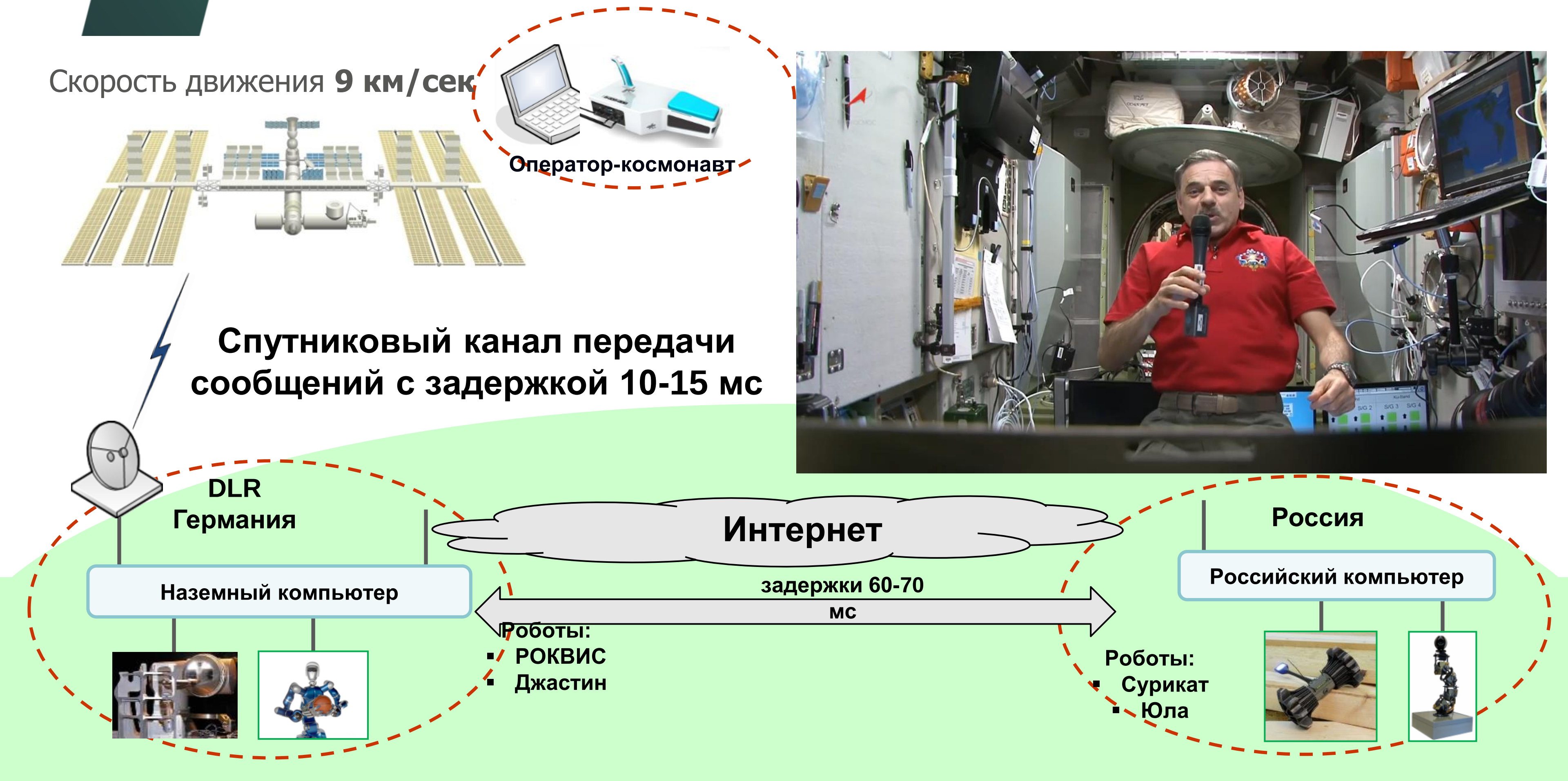
Стаи рыб образуют информационную структуру, действуя как «единый организм», состоящий из отдельных особей

В 1784 году в отделение математики Берлинской академии наук объявила приз за лучшее решение проблемы противоречивости использования бесконечности в математике.

Вывод по итогам конкурса: Авторы всех работ не смогли объяснить, **каким образом из противоречивого утверждения** о существовании бесконечности – удалось вывести так много правильных теорем.

КОСМИЧЕСКИЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ СЕРИИ «КОНТУР - УПРАВЛЕНИЕ НАПЛАНЕТНЫМИ РОБОТАМИ С БОРТА МКС

Телематические технологии – разрешение физических противоречий через организацию информационного взаимодействия



Скорость перемещения роботов по поверхности земли **10 см/сек**

ПОЛИТЕХ

МАТЕМАТИКА ПРИРОДЫ : ИСТИНА ФОРМУЛОЙ НЕ ВЫРАЗИМА !,?

***истина** (выраженная на языке системы) не определена в самой системе*

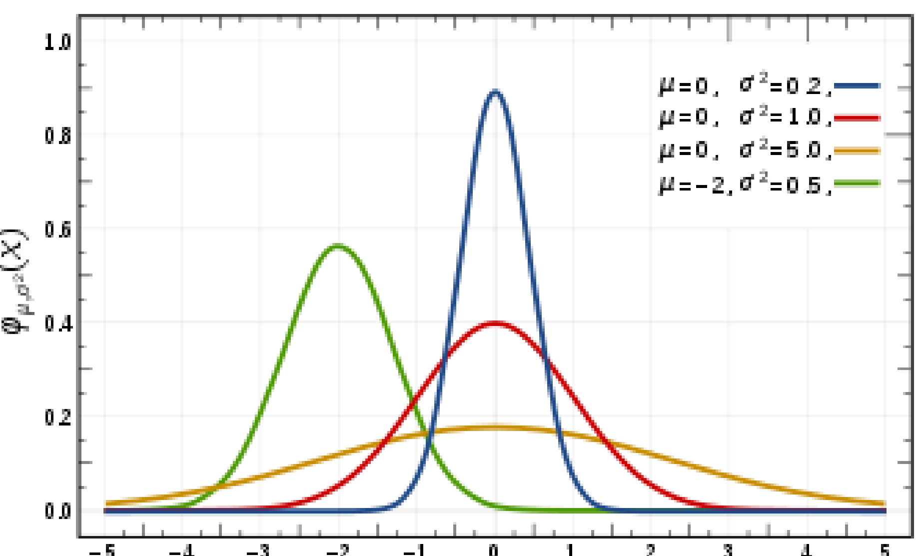
А. Тарский

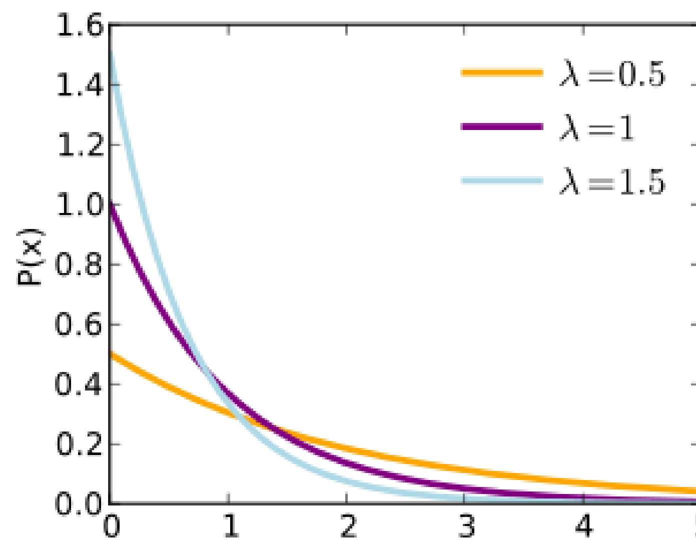
Событие: землетрясение

Смысл: Слабых землетрясений бывает больше, чем сильных «мощных».

Эксперимент: вероятность (частота) землетрясений превышающих некоторое значение мощности X_0, экспоненциально мала

Математический закон: формула распределение вероятностей любых событий имеет вид exp(-X* λ), $\lambda = 1/X_0$, в математической формуле смысл X_0 значения не имеет

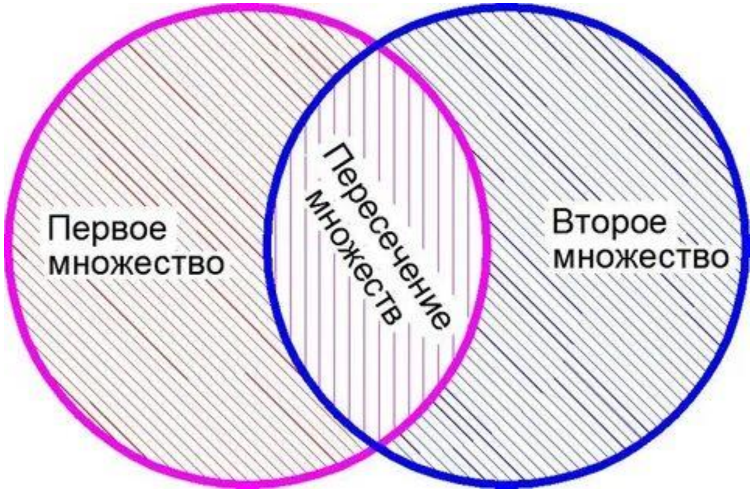




ФОРМАЛЬНОЕ НЕВЕРОЯТНОЕ

Каждая **математическая теория** является цепочкой высказываний, выводимых по правилам логики на основе сформулированных аксиом.

«Суть законов математики» в фундаментальной идеи: математических аксиом **конечное множество**, а объектов, к которым применимы эти аксиомы – **несчетное множество .....**



лист Мебиуса –
суть «3D тор»
«3D тор»
- суть «кружка с ручкой»

ПОЛИТЕХ

Как природный феномен записать на языке математики природы ?

Сложные физические процессы, можно описать с помощью «специальных функций» (используются для записи «не-берущихся интегралов, расходящихся рядов…), которые не выражаются в элементарных функциях,
но для **процессов мышления** (сознания, интеллекта..) множества «специальных функций» до сих пор не придумано - … символьная запись отношений между абстрактными понятиями (красиво) и объектами природы (цветок) формально не выразима ….. .

Точка зрения компьютерных наук: мышление есть «вычислительный» процесс, который следует законам природы, но чтобы «записать формулу мышления» нам не хватает знаний.

ОСНОВА «ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ» МАТЕМАТИКИ ПРИРОДЫ

Первичной операцией, которая формирует феномен мышления – распознавание объектов.

Что требуется, чтобы абстрактная физико-химическая система приобрела способность к распознаванию границ, необходимых для реализации мышления ?

Мышление начинается с поиска инвариантов как меры похожести
- Физические (состояния - термодинамическая энтропия)
- Информационные (состояния информационная энтропия)
- Интеллектуальные (состояния **объяснительная энтропия** тезауруса)

Итак, «основой» мышления является **аксиома распознавания (аксиома нумерации).**

Идея Курта Геделя:

Итак, «информация это **различие**, которое **имеет значение**»

- Суть идеи Геделя: различие должно быть «вычислимым», а **программу вычислений** можно считать особой формой записи некоторого числа ….
- **итак:** каждому числу можно **поставить в соответствие программу**, которая описывает функцию, **вычисляющую это число**.
- Итого: любой **содержательной программе сопоставляется** конкретное число, принадлежащее некоторому «числовому полю». В этом «поле», которое есть подмножество множества натуральных чисел N, работает алгоритм Геделя, сопоставляющий любым формулам число Геделя.

НУМЕРАЦИЯ ГЕДЕЛЯ

Мы знаем: числа бывают: натуральные и целые, рациональные и действительные, комплексные и алгебраические, но бывают и **числа Геделя**

Гедель использовал тот факт, что любое натуральное число можно представить в виде произведения простых чисел, например:

- 16 = 2*8=2*2*2*2
- 34= 17*2
- 98=49*2=7*7*2 и т.д.

Это даёт возможность арифметизации

1) математических формул,
2) высказываний,
3) доказательств

путем сопоставления каждому из них одного единственного порядкового номера, называемого числом (номером) Гёделя

ПОЛИТЕХ

ОТ НУМЕРАЦИИ ГЕДЕЛЯ К МАШИНЕ ТЬЮРИНГА

- Итак, язык математики состоит из различных знаков операций (умножения, сложения и т.д.), знаков равенства, скобок, переменных.
- Гёдель определил набор знаков и построил с их помошью алгоритм, который сопоставил каждому символу или формуле математики уникальный номер.
- Номер Геделя - это не число, а позиция символа на некой бесконечной ленте, аналогичной той, которую Алан Тьюринг в своей «машине».
- Нумерация Геделя – есть специальный инструмент, который позволил доказать, что любая арифметическая система либо полна, либо непротиворечива.

ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НУМЕРАЦИИ

Операции логического отрицания присвоили номер 1
операции сложения – номер 2
и т. д.
Цифры тоже символы, поэтому они имеют свои номера. Так:
цифра 0 имеет номер 6.
цифра 1 не имеет собственного номера, а записывается через операцию инкремента ("следующее число"), обозначаемую буквой s.
Чтобы записать в этой системе **число 2, то используется ss0**.

Нумерация Геделя символам языка формальной арифметики:
5 кодирует =
7 кодирует s
8 кодирует (
9 (
11 →
12 *
15 &
…

Пример: Выражение 2*2=4 кодируется ss012ss05ssss0

ИТАК

- Каждой «правильной» программе соответствует некоторое уникальное число из «числового поля Геделя».
- Большинству чисел из множества натуральных чисел N соответствуют программы, которые не будут «правильно» работать так как текст программ не отвечает синтаксическим правилам ни какого языка программирования.
- Будем считать, что такие программы вычисляют **нигде не определенные функции**.

МОЖНО ЛИ НАБЛЮДАТЬ «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИСТИНЫ» ?
(НАВЫКИ АБСТРАГИРОВАНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ СМЫСЛА)

ПОЛИТЕХ

наблюдаемые объекты мира

Математическое абстрагирование

математические понятия и операции

13,
a/b
$x^2 + y^2 = c^2$

Операции исчисления

«предложения»=формулы, которые надо доказать

$\begin{pmatrix} A^T = A \\ A * A = A \end{pmatrix}$ унарные $n = 1$

$\begin{pmatrix} (A * B) * C = A * (B * C) \\ A * E = E * A = A \\ A^{-1} * A = A * A^{-1} = E \end{pmatrix}$ бинарные $n = 2$

…

$((A, B, C) = (A * [B * C]))$ n - арные $n > 2$

абстракции и вербальные понятия

Дерево, Авто, Дом
треугольник,
функция

множества

$\begin{pmatrix} \underset{\text{числа}}{A}, & \underset{\text{функции}}{Q}, & \dots, & \underset{\text{векторы}}{Z} \end{pmatrix}$

Формулы

- либо «истины»,
- либо «ложны»

sin2+cos2=1
1+2=3
1+1=10

Предложения
- либо имеют
- либо не имеют

«смысла»

Высказывание:

Стая легких времирей!
Ты поюнна и вабна,
Душу ты пьянишь, как струны,
В сердце входишь, как волна!

В. Хлебников

Истинно или ложно высказывание Поэта ?

ФЕНОМЕН АВТОРЕФЕРЕНТНОСТИ

Высказывание: Любая представимая в формальной арифметике функция является рекурсивной.

При каких условиях «объяснение» этого высказывания (МНЕНИЯ) можно считать «доказательством» ?

– **объяснения** допустимы **в качестве личных доказательств** , но не допустимы в качестве математических доказательств

Суть : референтности : мозг обрабатывает информацию «о себе само» иначе, чем о чем-либо другом… «внешнем:

Доктрина компьютерных наук в ответе на вопрос - "а как докажешь» ?

– доказательство суть **исчисления абстракций…..**

Вопрос: что есть «внешний мир» для исчислимых абстракций ?

«внешний мир» – это тоже абстракция , например, множество с особыми свойствами («числовое поле») , которые задаются операциями, оставляющими исчисленные абстракции в этом же множестве –аналог «референтности»)

Фундаментальные принципы и «числовая» аргументация Геделя и тезис Черча

- Фундаментальные принципы – суть высказывания на некотором языке
- Аргументация Геделя: Каждому высказыванию (каждой программе на языке программирования) можно поставить в некоторое число и …. наоборот.
- Итак: .

если, описание алгоритма вычисления – есть фраза на русском языке: «**два плюс два равно четыре» , которая** использует k различных символов, алгоритм нумерации Геделя каждому символу сопоставит цифру в k-ичной системе счисления.

Поскольку программа — это последовательность символов, её можно считать записью некоторого числа в k-ичной системе счисления.

тезиса Чёрча:

Числовая функция тогда и только тогда алгоритмически (или машинно) вычислима, когда она частично рекурсивна.

ПРИМЕР : РЕКУРСИЯ В ПРОГРАММИРОВАНИИ

Рекурсия — это функция, которая вызывает саму себя.

Например, функция умножает число на саму себя и внутри ещё раз умножает число на саму себя, и так до бесконечности.
Формально выглядеть так:

```
func A (x) => x * A(x-1)
```

На языке Phyton

```
void A(n){
if(n>=1){
      A(n-1);
       print(n);
       }
}
```

класс рекурсивных функций совпадет с классом функций, вычислимых с помощью машин Тьюринга.

ПОЯСНЕНИЯ К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ РЕКУРСИИ

```
void A(n) { if(n>=1){
    A(n-1);
      print(n);
       }
}
```

Если n=3, то программа выведет 3, 2, 1.

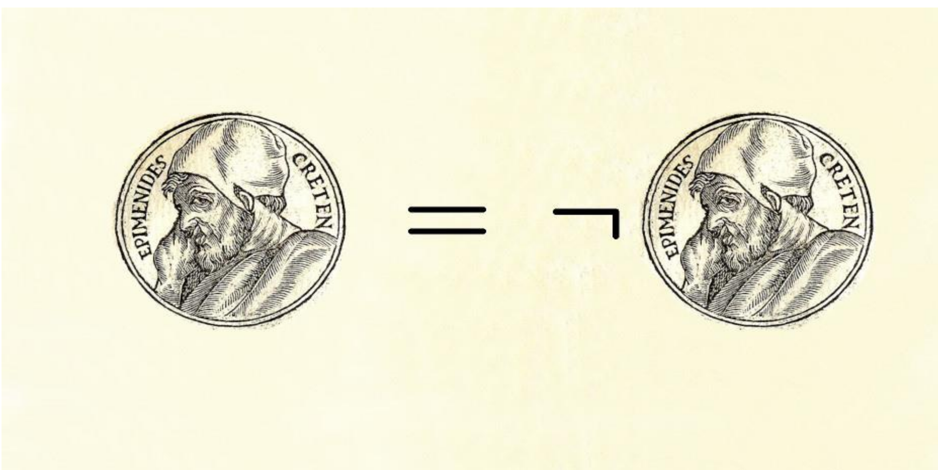
Любую рекурсивную функцию можно описать в виде цикла, так что рекурсии можно не использовать в коде вообще

Плюсы: код с рекурсией короче и проще для понимания (запись алгоритма обхода древовидных структур для сортировки.

Минусы: требует больше времени на выполнение и может переполнить память. (при каждом вызове рекурсивная функция добавляется в специальный стек)

Рекурсия доказательств в теории Геделя

В неформальном объяснении **теорем Гёделя о неполноте** говорят так: *«теорема доказывает, что есть вещи, непостижимые для человеческого разума»*.
Гедель утверждает, что в достаточно сложных языках существуют истинные, но недоказуемые высказывания. Еще строже: если высказывания построены с использованием рекурсивных функций, то…



Рекурсивное высказывание:
для своего описания должно повторить саму себя

Например, **всякое число равно самому себе** – интуцитивно понятно но это **аксиома арифметики**. Чтобы все окончательно формализовать требуется еще одна абстракция

«формальное исчисление»

Понятия «формальное исчисление», алгоритм, программа

- Формальное исчисление суть **ЯЗЫК** (алфавит и грамматика), в котором определены правила построения утверждений/теорем, формул/высказываний, набор аксиом и множество правил логического вывода.

- Каждое предложение языка **/теорема /высказывание** содержит цепочку формул (высказываний) $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, … , $\mathbf{A_n}$=> **T, истинность** которых может быть доказана на основе ранее установленных теорем, утверждений или аксиом

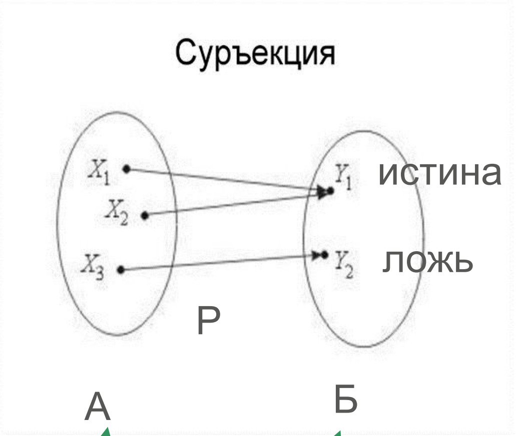
- В «правильно» построенном (то есть разрешимом) формальном исчислении существует алгоритм, который для каждого высказывания **T** за конечное время выдаёт ответ:
  - «да» - это предложение выводимо (истинно) в рамках исчисления
  - «нет» — это предложение выводимо (ложно).

Вывод: можно считать, что алгоритм — это программа, написанная на некотором языке программирования, которая на вход принимает некоторое предложение и выдает результат из двух значений: «истина» (предложение выводимо) или «ложь» (предложение не выводимо)

Итак, теперь ясно, что все дело в языке: лингвистический поворот КН

Если есть множество Т – текст, состоящий из строк символов алфавита А, то:

- из Т можно выделить подмножество так называемых **высказываний** **В** — грамматически правильных текстов, которые являются входными данными **алгоритма** (функции) **Р**, сопоставляющей всем элементам **В** одно из двух значений: ИСТИНА или ЛОЖЬ



(это функция отображает множество А из N элементов в булево множество Б, состоящее только из двух элементов-значений).

ps заметим, предложение «***а ну, давай быстрей!*»** - не истинно и не ложно, поэтому высказыванием с рассматриваемой точки зрения не является

Итак: **«алгоритм»** как последовательность инструкций («программ»), которая *за конечное число шагов* переводит входные данные в результат => булеву переменную.

Методологический комментарий: вычислимость истины

- Неформально вычислимость - это **способность эффективно решать некоторую проблему с помощью алгоритмов, вычисляющих числа**.
- Вычислимость связана с существованием алгоритма вычисления выражения, имеющий номер из «нумерации Геделя».
- В настоящее время изучены модели вычислимости по Тьюрингу однако, для функций с действительными аргументами и значениями понятие вычислимости требует до определения

Итоговые комментарии в форме утверждений

- **Утверждение** . Если множество S перечислимо, то оно является множеством значений некоторой вычислимой функции.
- **Утверждение** . Если множество S является множеством значений всюду определённой вычислимой функции, то оно перечислимо (каждому элементу можно сопоставить натуральное число) .

Заключение

- **Тезис Тьюринга**. Любой вербальный алгоритм в алфавите *M* может быть реализован некоторой машиной Тьюринга, работающей над алфавитом *M.*
- **Тезис Черча-Тьюринга**. Всякая интуитивно вычислимая рекурсивная функция является вычислимой по Тьюрингу.

Теорема . Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ рекурсивна тогда и только тогда, когда она вычислима по Тьюрингу.

Определение

- Функция $f : N \to N$ называется вычислимой, если существует алгоритм P, который на любом входе $n \in N$ выдает $f(n)$.
- под записью $f : A \to B$ мы будем понимать т.н. частичные функции, **то есть** на некоторых аргументах $n \in A$ функция $f(n)$ может быть не определена. Для тех аргументов $n \in N$, для которых $f(n)$ не определено, алгоритм P при этом не выдает никакого значения на выход.
  - Функция $f(n) = 2n$ вычислима. Алгоритм: умножить число 2 само на себя n раз.
  - Функция $f(n) = [\log n]$ (не определенная для $n = 0$) вычислима: Алгоритм взятия логарифма и целой части реализовано во всех языках программирования

- Пример: композиции вычислимых функции вычислимы

$$2^{n2}\ ,\ 2^{2n}, [\log n]^n$$

Методологический комментарий: Разрешимые множества

- Множество **натуральны чисел** X называется **разрешимым**, если существует *алгоритм*, который по **любому натуральному n** определяет, принадлежит ли оно множеству X.

Определение: множество X разрешимо, если его **характеристическая функция f(n) то есть**

f（n）=（if n E X then 1 else 0 ）вычислима.

Вопрос: существуют ли неразрешимые *множества* ?

Ответ: да, потому, что алгоритмов вычисления характеристических функций разрешимых подмножеств натурального ряда счетное число, а всех подмножеств натурального ряда несчетное число..

Уточнение

- **Уточнение:** Множество $A \subseteq N$ называется разрешимым, если существует алгоритм, который для всякого входа $n \in N$ выдает 1, если $n \in A$, и выдает 0, если $n \notin A$.
- **Определение**. Характеристической функцией множества $A \subseteq N$ называется функция $\chi A : N \to \{0, 1\}$, для которой
$\chi A(n)= 0$, $n \notin A$
 $\chi A(n)= 1$, $n \in A$,

- **Лемма** . Множество $A \subseteq N$ разрешимо тогда и только тогда, когда функция χA вычислима.

- **Теорема Поста**: разрешимые множества - это перечислимые множества с перечислимыми дополнениями.

(Множество $A \subseteq N$ разрешимо тогда и только тогда, когда оба множества A и $N \setminus A$ перечислимы)

Методологический комментарий перечислимое множество

- **Определение** . Множество $A \subseteq N$ называется перечислимым, если существует алгоритм P , который вычисляет все элементы этого множества. Всякий элемент A вычисляется через конечное число шагов работы алгоритма P.
- Замечание 1. Важно, чтобы в последовательности результатов работы алгоритма P ничего, кроме элементов A, не встретилось.
- Замечание 2. Понятие перечислимости более широкое, нежели понятие разрешимости.

- **Лемма** . Если множество $A \subseteq N$ разрешимо, то оно перечислимо.

Итоговые утверждения

- Утверждение . Если множество S перечислимо, то оно является множеством значений некоторой вычислимой функции.
- Утверждение . Если множество S является множеством значений всюду определённой вычислимой функции, то оно перечислимо.

Итак: формальное исчисление - это среда, где выполняются операции над абстракциями

- Арифметика (сложение, умножения чисел) гипотез авс
- Векторная алгебра (конечномерное сложение векторов)
- Функции (бесконечномерные вектора)
- Алгебра Ли (операция коммутирования)
- Аксиома выбора
  - Квайн – программа которая печатает саму себя- «**Куайн»** (*квайн*, англ. *quine*) — компьютерная программа, которая выдаёт на выходе точную копию своего исходного текста. Куайны возможны в любом тьюринг-полном языке программирования — как следствие теоремы Клини о рекурсии

РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ РЕИФИКАЦИИ ПОНЯТИЯ «ВЫЧИСЛИМОСТЬ»

- машин Тьюринга (А.Тьюринг, 1936 г.);
- машины Поста (Э.Пост, 1943 г.);
- нормальных алгорифмов Маркова (А.А.Марков, 1950);
- МНР-вычислимых функций (Х.Стерджис, 1963)

Если функция не вычислима в соответствии с каким-то из указанных подходов, то она не может быть вычислена в рамках иной другой из указанных формализаций

Формалитзация понятия «алгоритм» позволяют говорить и о существовании алгоритмически неразрешимых проблем.

Феномен рекурсии в теории алгоритмов

- **Тезис Черча-Клини** : класс интуитивно вычислимых функций» совпадает с классом «частично рекурсивных функций»
- Если функция *f(x)* – не является частично-рекурсивной, то она не является интуитивно вычислимой, а потому ее вычисление является «алгоритмически неразрешимой проблемой».
- Факт: среди множества интуитивно вычислимых функций, не нашлось ни одной, о которой можно было бы сказать, что она не принадлежит к классу частично рекурсивных функций.

- На всех уровнях жизни, начиная с простейших клеток, разум и материя, процесс и структура неразрывно связаны между собой».

physical systems are *effectively* physical computers

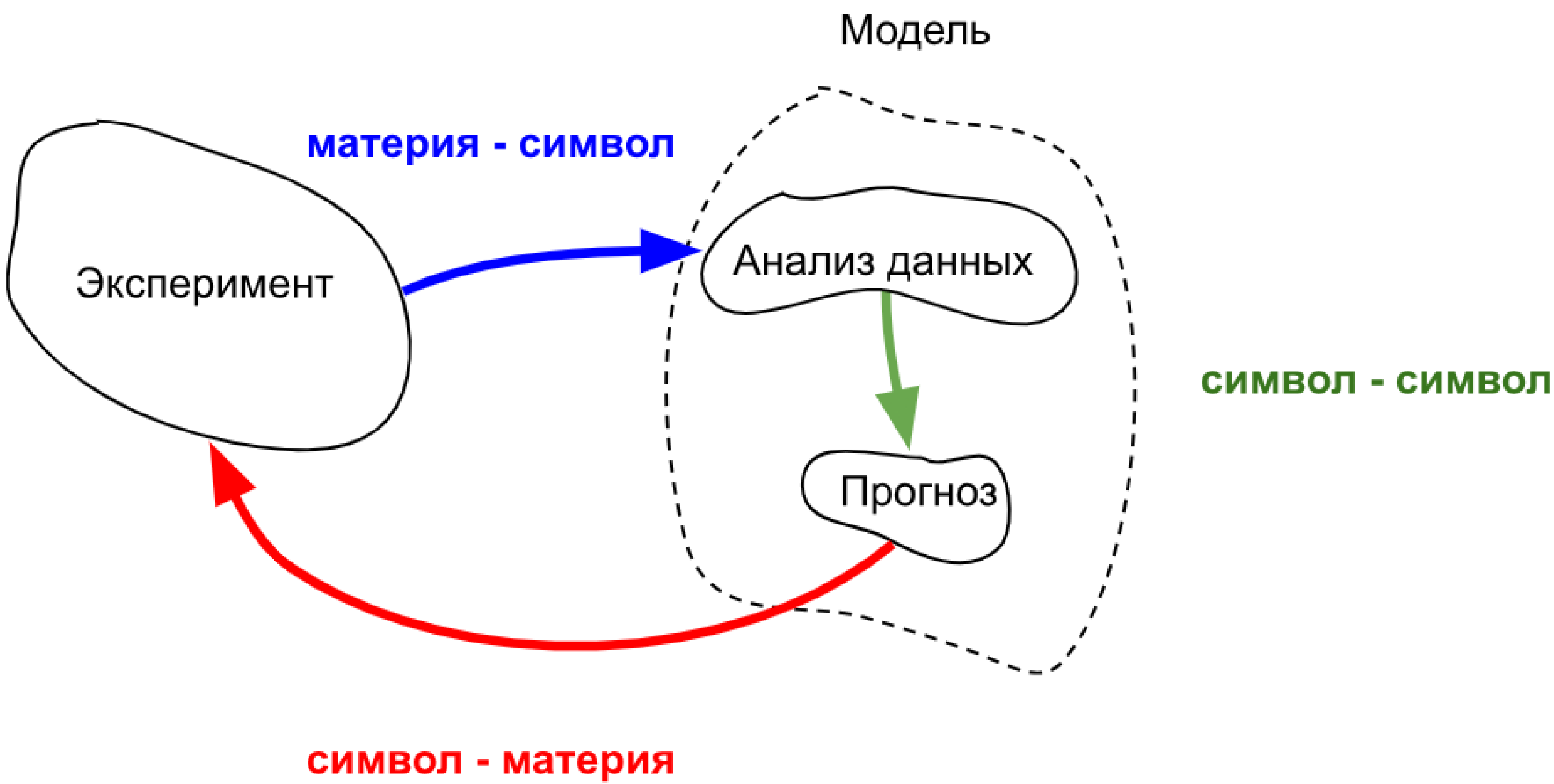
Пора преодолеть картезианское разделение разума и материи

В физической среде никакого преобразования потоков информации не наблюдается. Наблюдается только стремление к состояниям с минимальным значением полной потенциальной энергии.

результат некоторого физического процесса (в данном случае, высыхания взвеси) *можно использовать* в качестве решения некоторой задачи.

человеческие мозги нужны для того, чтобы понять, решение какой именно задачи наблюдаем в данном физическом явлении.

Семиотическое замыкание



десигнат — **предмет, обозначаемый собственным именем некоторого языка**, или **класс предметов, обозначаемых общим (нарицательным) именем**.

ПОЛИТЕХ

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ/ИНФОРМАЦИОННАЯ ПРИЧИННОСТЬ

картезианцы из монастыря Пор-Рояль вторят Декарту: если мысль выражена словесно, она уже не точная. Имена вещей не соответствуют сущности.
Есть ли возможность создать рационального языка.

Дж. Беркли утверждает, что слова вводят ум в заблуждение. Необходимо использовать в языке только понятия, которые точно находятся в согласии с опытом.
Клод -Ариан Гельвеций сравнивает язык с лабиринтом.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ВЫЧИСЛИМЫМИ ФУНКЦИЯМИ И ПЕРЕЧИСЛИМЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

Пусть $A \subseteq N$ — некоторое множество натуральных чисел. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1. A перечислимо;
  2. A является областью значений некоторой вычислимой функции;
  3. A является областью определения некоторой вычислимой функции;
- 4. полухарактеристическая функция A

  χ (n) =0, если $n \in A$,

  χ (n) не определена , если $n \notin A$.

  вычислима.

из 4 следует 3. Действительно, областью определения функции $\chi(n)$ как раз и является множество A. Раз эта функция вычислима, то A является областью определения вычислимой функции.

из 1 следует 4

из 3 следует 2

из 2 следует 1.

Итак,

- перечислимые множества — это в точности области определения и области значений вычислимых функций. Множество перечислимо тогда и только тогда, когда его характеристическая функция вычислима.
- разрешимые множества являются перечислимыми.
- существуют перечислимые , но неразрешимые множества

Заключение

- **Тезис Тьюринга**. Любой вербальный алгоритм в алфавите *M* может быть реализован некоторой машиной Тьюринга, работающей над алфавитом *M.*
- **Тезис Черча-Тьюринга**. Всякая интуитивно вычислимая рекурсивная функция является вычислимой по Тьюрингу.
- **Тезис Маркова – принцип нормализации.** Любой вербальный алгоритм в алфавите *M* может быть реализован некоторым нормальным алгорифмом над алфавитом *M.*

Теорема . Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ частично рекурсивна тогда и только тогда, когда она вычислима по Тьюрингу.