

ВС ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

курс: Введение в профессиональную деятельность

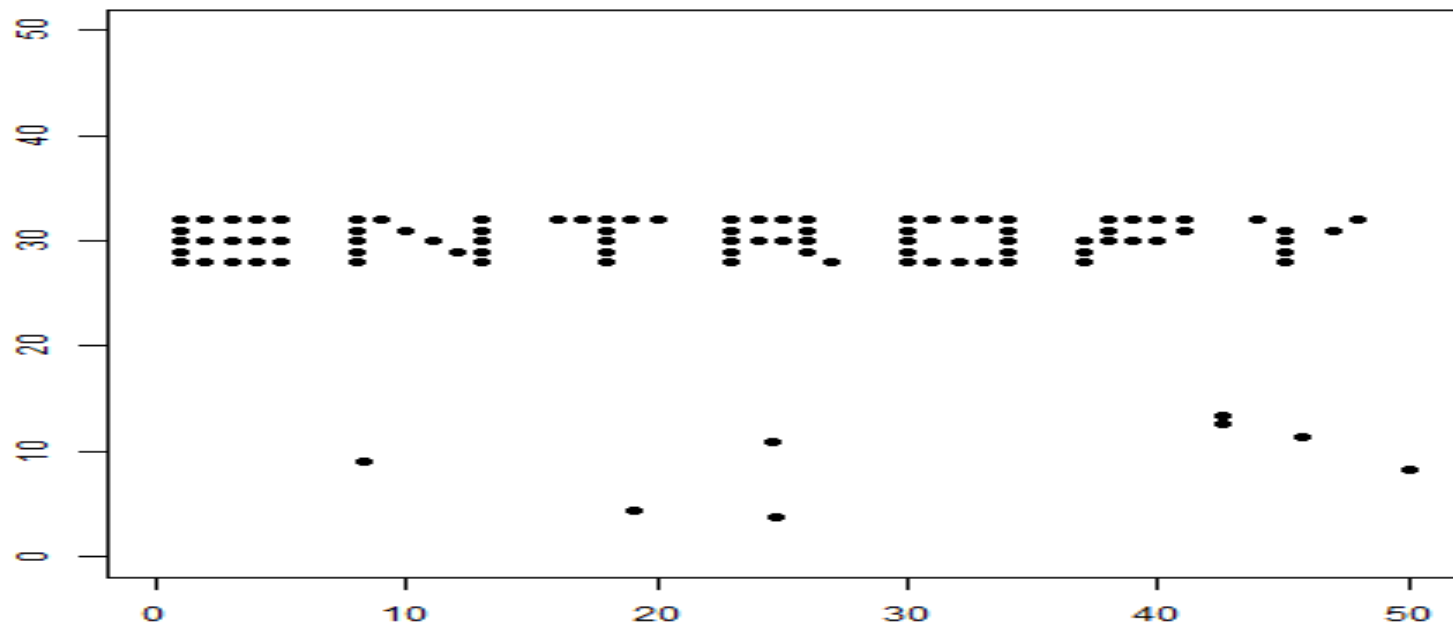
«математика и компьютерные науки»

«математическое обеспечение и администрирование информационных систем»

ЛЕКЦИЯ 5

МОДАЛЬНАЯ ЛОГИКА ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛЬНОСТИ

27.02.2025



Бывает : «энтропия» физических процессов и бывает энтропия некоторого события. В любом случае энтропию можно интерпретировать как **произведение меры уверенности** в том, что некоторое событие (состояние) произойдет (об этом есть информация) **на меру неопределенности (у конкретного события есть вероятность)** того, что произойдет именно это событие



НО НЕ ВСЯ ФИЗИЧЕСКАЯ РЕАЛЬНОСТЬ «СЛЕДУЕТ» ЗАКОНУ УВЕЛИЧЕНИЯ ЭНТРОПИИ ?!



В изолированной физической системе энтропия либо **остаётся неизменной**, либо возрастает в неравновесных процессах, достигая максимума при установлении термодинамического равновесия (**закон возрастания энтропии**)

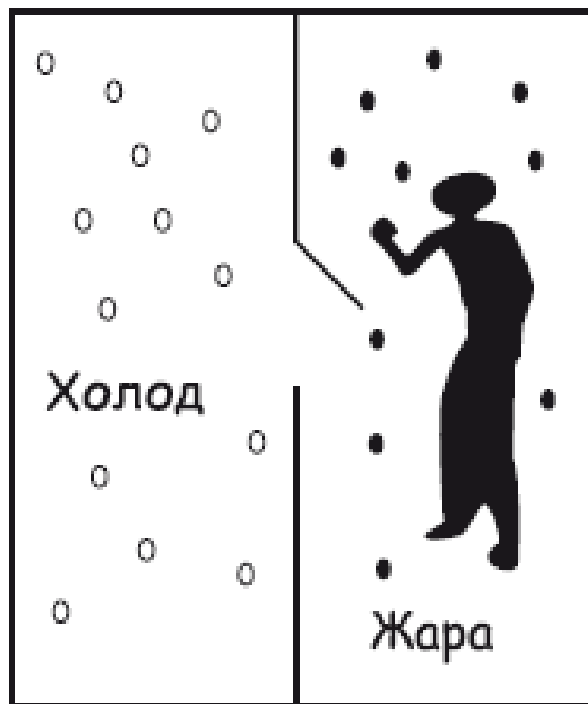
Математика и физика по разному представляет **целостный объект** через единство (непротиворечивость) и обратимость отдельных частей.



Вопрос: почему и как мозг распознает целое быстрее, чем отдельные составляющие, из которых «собирается» объект ?



ЧТО ЖЕ (ИЛИ «КТО») РАБОТАЕТ ПРОТИВ ЭНТРОПИИ ?



Демон Максвелла — это символ осознания в бессознательной системе

Логические законы: краеугольный камень «антиэнтропийного» мышления ?

Информация согласно теории К. Шеннона - **мера уменьшения неопределенности**, непосредственно связанная с передачей сообщения, которое уменьшает **количество равновероятных состояний наблюдаемой системы**. Таким образом, поступление информации (сообщения) в систему – приводит к уменьшению ее энтропии:

$$\Delta I = -\Delta S$$

Соответственно, для системы с конечным количеством состояний (частей) или степеней свободы можно сформулировать новый фундаментальный закон

$$|I| + |S| = \text{const}$$

Величина константы в этой формуле определяется внутренней структурой рассматриваемой **физической системы**.

Итак: основа физического описания : закон возрастания энтропии
(но так происходит не всегда ?»)

Основа «понимания» мира: закон следования $X \rightarrow Y$ (из X следует Y)

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ - **СИМВОЛЫ-СВЯЗКИ:** «отрицания», «и», «или», «следования»

Понимание подразумевает, что между X и Y есть логическая СВЯЗЬ (импликация), то есть:

что X является **достаточным** для Y ('X **ВЛЕЧЕТ** Y'),

что Y является **необходимым** для X (Y **ВЫТЕКАЕТ** из X).

логический «закон»:

если X истинно, то ОБЯЗАТЕЛЬНО должно быть истинным Y:

НЕВОЗМОЖНО, чтобы X было истинным, а Y ложным.

(но высказывание «формирует» человек и так происходит не всегда ?)



Конструкция AND возвращает 1 (истина) когда оба входных операнда равны 1, во всех остальных случаях возвращается 0 (ложь).

Примеры:

$$1 \text{ AND } 1 = 1$$

$$1 \text{ AND } 0 = 0$$

$$0 \text{ AND } 1 = 0$$

$$0 \text{ AND } 0 = 0$$

Конструкция NOT возвращает обратное значение операнда.

Примеры:

$$\text{NOT } 1 = 0$$

$$\text{NOT } 0 = 1$$

Конструкция OR возвращает 1 (истина) когда один из входных операндов равен 1, в случае когда оба операнда равны нулю возвращается 0 (ложь).

Примеры:

$$1 \text{ OR } 1 = 1$$

$$1 \text{ OR } 0 = 1$$

$$0 \text{ OR } 1 = 1$$

$$0 \text{ OR } 0 = 0$$

Закон исключения третьего:

Из двух противоречащих суждений одно истинно, другое ложно, а третьего не дано.

$$A \vee \bar{A} = 1$$

принцип исключения третьего: среди двух высказываний, одно из которых является отрицанием другого, всегда имеется истинное высказывание



УТВЕРЖДЕНИЯ В ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ (ЛВ) ПРЕДСТАВЛЯЮТСЯ ФОРМУЛАМИ.

- из ложности **отрицания** некоторого суждения нельзя делать вывод об **истинности** этого суждения

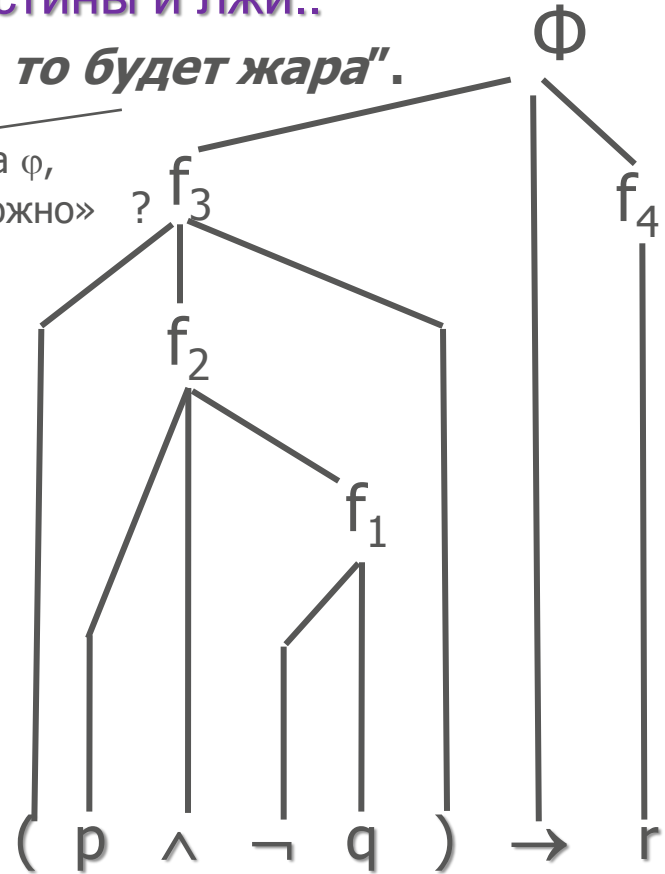
Закон асимметрии истины и лжи..

Формула: "Если есть солнце и нет ветра, то будет жара".

$$\Phi = (p \wedge \neg q) \rightarrow r$$

Истина ли формула Φ , если p «истина», а q «ложно»

$$\Phi ::= p \mid \neg \Phi \mid (\Phi \vee \Phi) \mid (\Phi)$$



- «Атом» в формуле ЛВ представляет конкретный факт.
- Факт может быть или его может не быть в реальности.

$$\Phi = 1 \text{ (истина) на интерпретации } \langle p=1, q=0, r=1 \rangle$$



ПАРАДОКСЫ ЛОГИЧЕСКОГО СЛЕДОВАНИЯ

Итак, имеет место неадекватность формулы $A \rightarrow B$ (или $A \supset B$) для выражения отношения "А влечет В", **когда факты А и В друг с другом не связаны.**

Поэтому в отношении **ЛОГИЧЕСКОГО следования фактов А и В** необходимо добавить отношения "возможно" и "необходимо":

$'A \text{ логически влечет } B' \equiv 'A \rightarrow B'$

при условии, что

истинность В и ложность А вместе сосуществовать не могут.

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

НЕВОЗМОЖНО!



ПОЛИТЕХ

ЛОГИКА РЕАЛЬНОСТИ: МОДАЛЬНОСТИ НЕОБХОДИМОСТИ И ВОЗМОЖНОСТИ

Грамматика «логики высказываний» (ЛВ):

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \vee \varphi)$$

Пример формулы ЛВ:
 $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$

Грамматика «модальной логики» (МЛ):

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \vee \varphi) \mid \boxed{\varphi}$$

Примеры формул МЛ:
 $\boxed{p} \rightarrow \diamond q, \boxed{p} \rightarrow \boxed{\boxed{p}}$

$\boxed{}$ – «необходимо»

\diamond – «ВОЗМОЖНО»

Если p «необходимо», то q – «возможно»

Модальная логика – это множество формул, в котором кроме **логических** связок $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ и т.п., есть **две новые связки**: **модальности** $\boxed{}$ и \diamond .



Утверждения в ЛВ и МЛ представляются формулами.

$$\Phi = (p_1 \wedge \neg p_2) \rightarrow p_3$$

$$F = \Box(p_1 \rightarrow \Diamond p_2)$$

Формула Φ классической логики высказываний принимает значение 'И' либо 'Л' на конкретной интерпретации – модели окружающего мира, на конкретном наборе 'И' либо 'Л' значений атомов. (*"Если солнце и нет ветра, то будет жара"*).

Значение И/Л **модальной формулы** F зависит не только от истинностных значений входящих атомов, но и ***от контекста.***

А число контекстов **бесконечно!**

Атом в логической формуле представляет конкретный факт. Если $p=И$, то соответствующий факт имеет место (**истинен**).

$\Box\varphi \rightarrow \varphi$ из «необходимо» φ следует φ

В области знаний (**эпистемическая** логика (логика знаний)): **ДА!**

– Если я **знаю**, что Саша любит Машу, то Саша любит Машу.

*для эпистемической логики это **аксиома***

В области **времени** (**темпоральная** логика (логика времени)): **ДА!**

– Если я **всегда** буду любить Катю, то я **и сейчас** люблю Катю.

*для темпоральной логики это **аксиома** (будущее включает настоящее)*

В области **законов и норм** (**деонтическая** логика): **НЕТ!**

– Если студенты **обязаны** посещать лекции, то они посещают лекции

*для деонтической логики это **НЕ аксиома** (истинность формулы не может зависеть от хотелок студентов!).*



ПРОВЕРКА ИСТИННОСТИ МОДАЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ

Как проверить выполнимость модальной формулы?

$$F = \Diamond [] p \wedge \Diamond q$$

Для определения истинности F нужно определить истинности модальных формул $[]p$ и $\Diamond q$.

Как определить истинностное значение формулы $[]\phi$, если истинностное значение формулы ϕ известно?

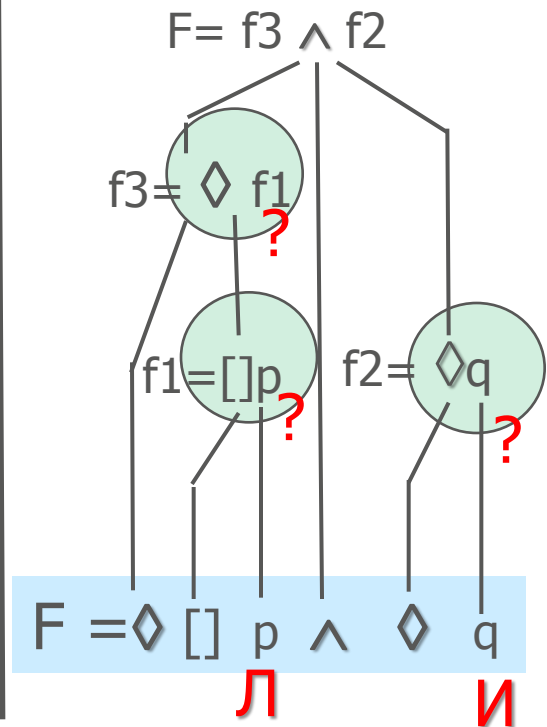
Истинностное значение модальных формул

$$[]p \text{ и } \Diamond q$$

зависит не только от истинностных значений атомов, но и от ситуации, от КОНТЕКСТА.

Но ситуации разные и их бесконечное число!

Структура формулы F (синтаксическое дерево)

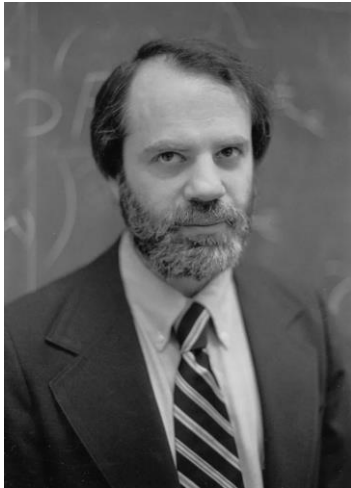




ПОЛИТЕХ

«Картина мира» Лейбница как множество «возможные миры»

Понятие «возможные миры» восходит к Г. Лейбницу:



С. Крипке
1940-1922

"Все существующее в мире можно рассматривать как реализацию актуализированной сейчас одной из бесчисленного множества мыслимых возможностей"

«возможное состояние (возможная история) мира» это «контрфактическая ситуация», описываемая формулами модальной логики



1646-1716

Лейбниц считал, что **мыслимые** Богом **возможные миры**, согласованы с "истинами разума", законами математики и логики, лежащими в основе всего мироздания.

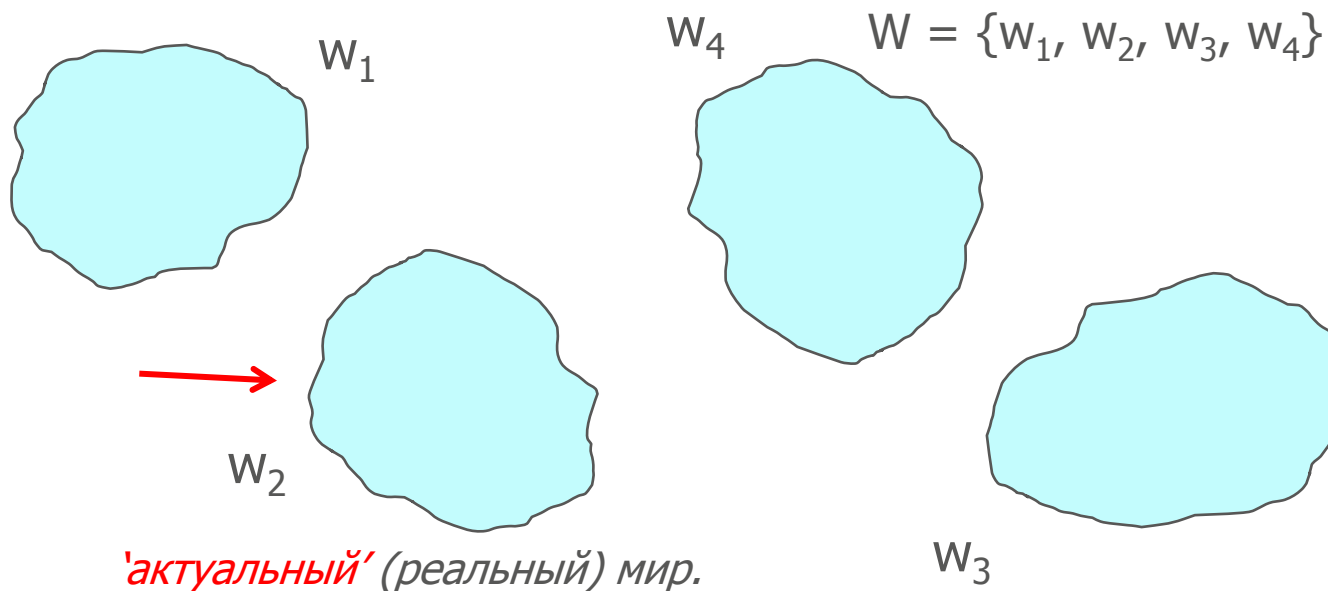
Поэтому **законы логики и математики** выполняются во всех возможных мирах. Обычные же факты выполняются только в некоторых возможных мирах.

Имеется две модальности для характеристики истины :

- **необходимость**
- **ВОЗМОЖНОСТЬ:**

"необходимая истина" выполняется **во всех возможных** мирах
(*истина разума*),

"возможная истина" выполняется **в некоторых возможных** мирах
(*"истина случайного факта"*).

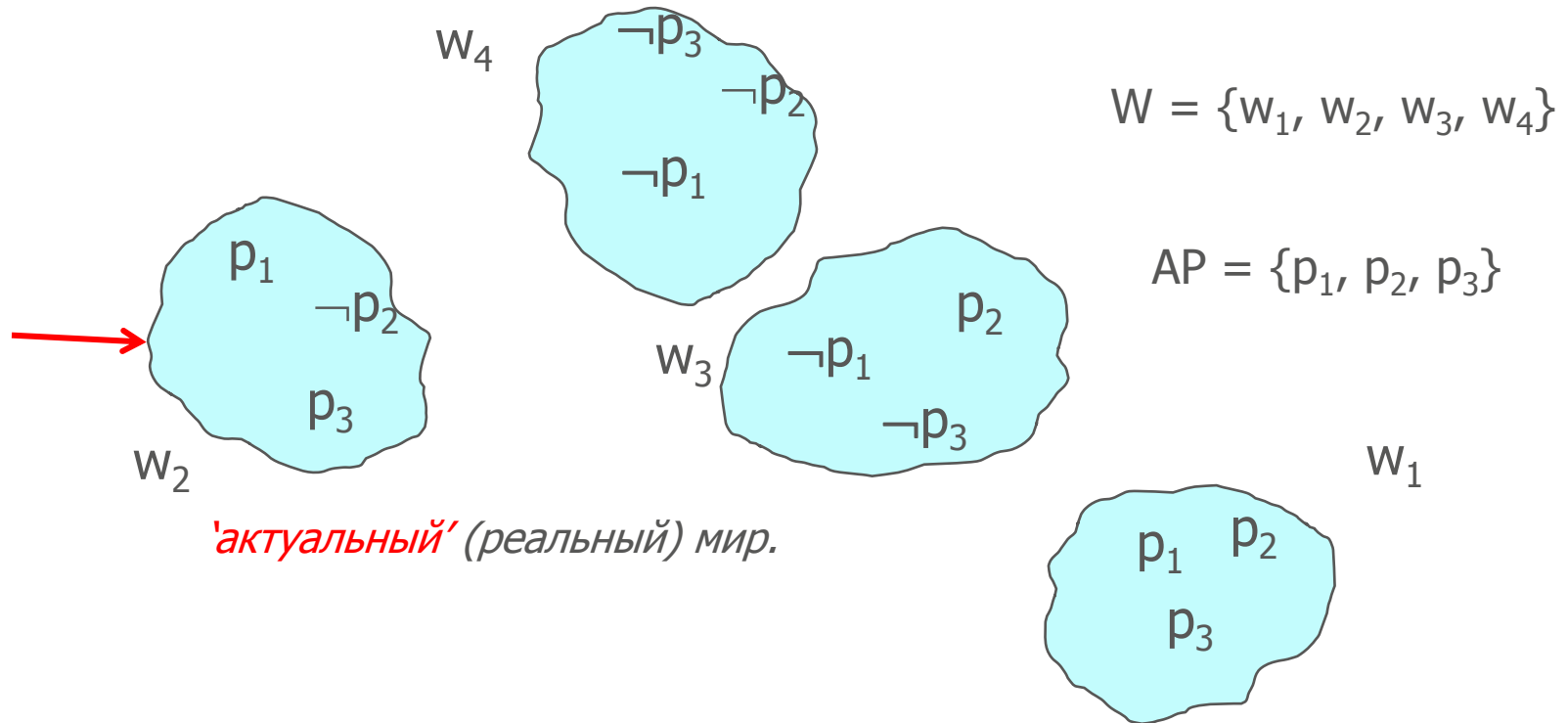


Все возможные ситуации, адекватные рассматриваемой проблеме, можно ПРЕДСТАВИТЬ **ЯВНО** как **'возможные миры'**.

В основе семантики возможных миров лежит способность человека размышлять над ходом жизни, представлять развитие различных событий и ситуаций, конструировать возможное положение дел в будущем и, оглядываясь назад, моделировать иной исход уже свершившихся событий.



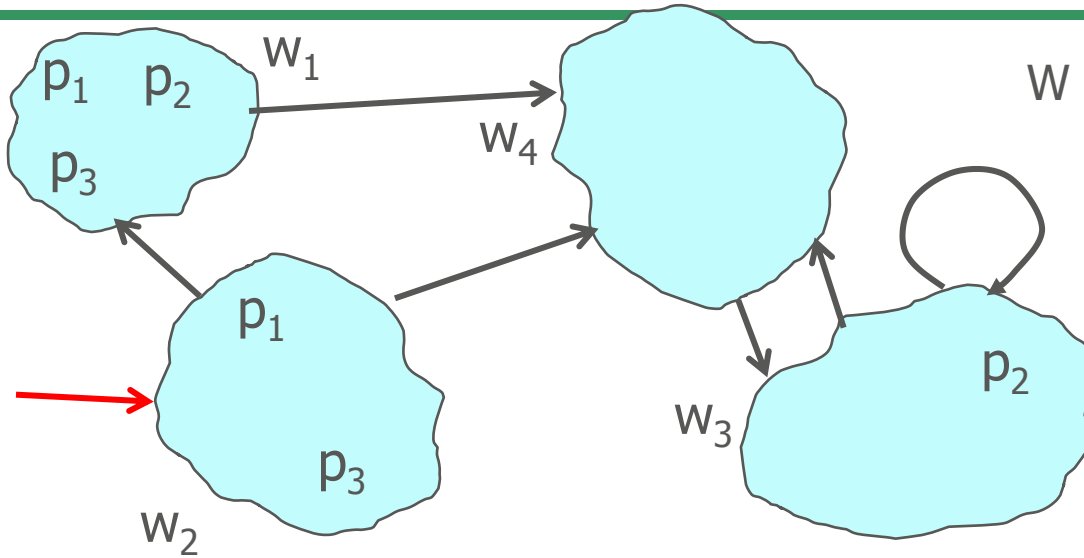
ВОЗМОЖНЫЕ МИРЫ ПРЕДСТАВЛЯЮТСЯ С ПОМОЩЬЮ «ФАКТОВ»



Факты представляются множеством «атомов» - переменных имеющих значение «истина» или «ложна» . В конкретном возможном «мире» (ситуации) атом-факт может быть истинным, а в другой – ложным!



В СЕМАНТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С. КРИПКЕ ВСЕ ВОЗМОЖНЫЕ СИТУАЦИИ ПРЕДСТАВИТЬ ЯВНО – КАК ВОЗМОЖНЫЕ



$$W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$$
$$AP = \{p_1, p_2, p_3\}$$

$$L(w_1) = \{p_1, p_2, p_3\};$$
$$L(w_2) = \{p_1, p_3\};$$
$$L(w_3) = \{p_2\};$$
$$L(w_4) = \{ \}$$

$$R = \{ (w_1, w_4), (w_2, w_1), (w_2, w_4), (w_3, w_4), (w_3, w_3), (w_4, w_3) \}$$

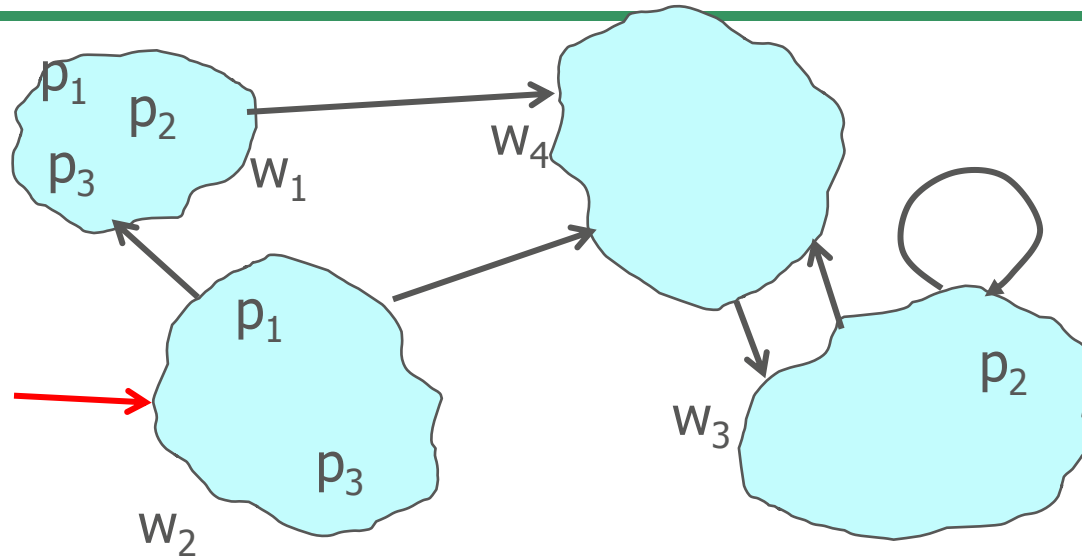
актуальный' (реальный) мир.

в каждом мире показаны только истинные атомы.

Миры (ситуации) можно связать : определив бинарное отношение $R \subseteq W^2$.



ОТНОШЕНИЕ ДОСТИЖИМОСТИ СТРУКТУРЫ КРИПКЕ $R \subseteq W^2$



$$AP = \{p_1, p_2, p_3\}$$

$$L(w_1) = \{p_1, p_2, p_3\};$$

$$L(w_2) = \{p_1, p_3\};$$

$$L(w_3) = \{p_2\};$$

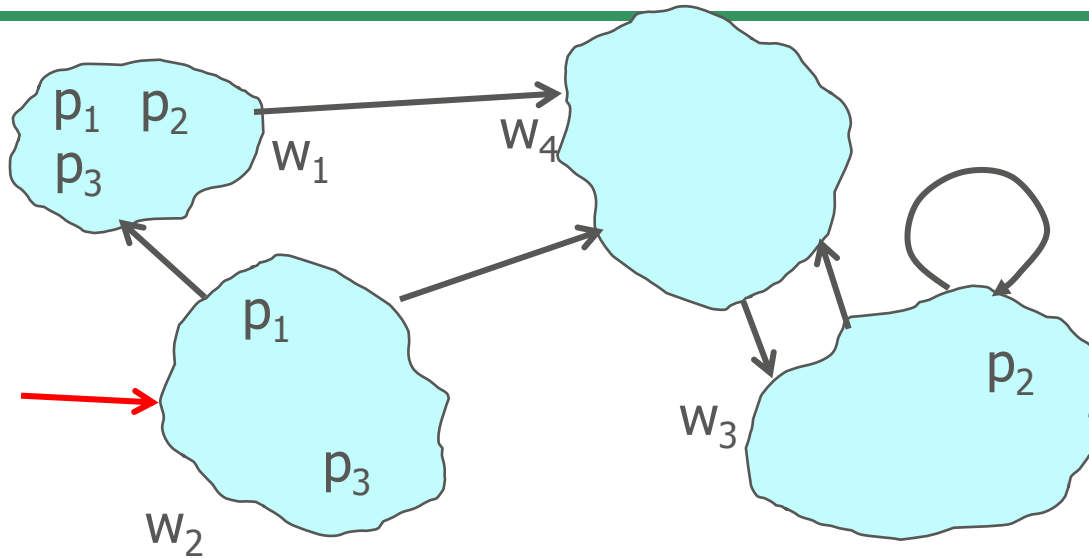
$$L(w_4) = \{ \}$$

$$R = \{ (w_1, w_4), (w_2, w_1), (w_2, w_4), (w_3, w_4), (w_3, w_3), (w_4, w_3) \}$$

В мире w мир w' является "ДОСТИЖИМЫМ" ("видимым") для w , если из w в w' идет ребро: $(w, w') \in R$ или wRw' (достижимость - за один шаг).



Для «ВОЗМОЖНЫХ МИРОВ» МОЖНО ЗАДАТЬ ОТНОШЕНИЕ ДОСТИЖИМОСТИ НА СТРУКТУРЕ $R \subseteq W^2$



$$W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$$

$$AP = \{p_1, p_2, p_3\}$$

$$L(w_1) = \{p_1, p_2, p_3\};$$

$$L(w_2) = \{p_1, p_3\};$$

$$L(w_3) = \{p_2\};$$

$$L(w_4) = \{\}$$

$$R = \{ (w_1, w_4), (w_2, w_1), (w_2, w_4), (w_3, w_4), (w_3, w_3), (w_4, w_3) \}$$

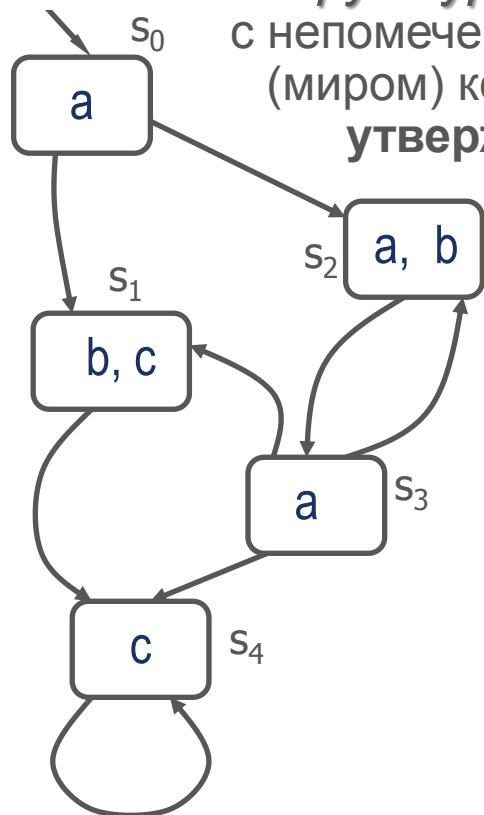
В мире w мир w' является "*достижимым*" ("видимым") для w , если из w в w' идет ребро: $(w, w') \in R$ или wRw' (*достижимость - за один шаг*).

Утверждения φ' , истинные в мире w' , *достижимом* из мира w , необходимы для оценки значения истинности *модальной формулы* в мире w , если *она* включает модальности бокс \Box или ромб \Diamond .

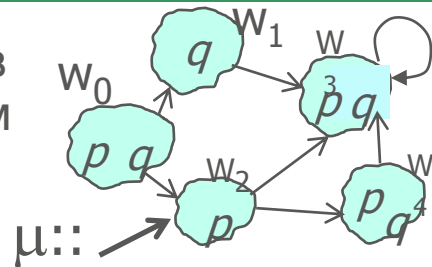


ФОРМАЛЬНАЯ СЕМАНТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИК

$M ::$



Структура Крипке – конечная система переходов с непомеченными переходами, с каждым состоянием (миром) которой **связано множество атомарных утверждений**, истинных в этом состоянии.



Структура Крипке формально - ориентированный граф с помеченными вершинами (мирами).

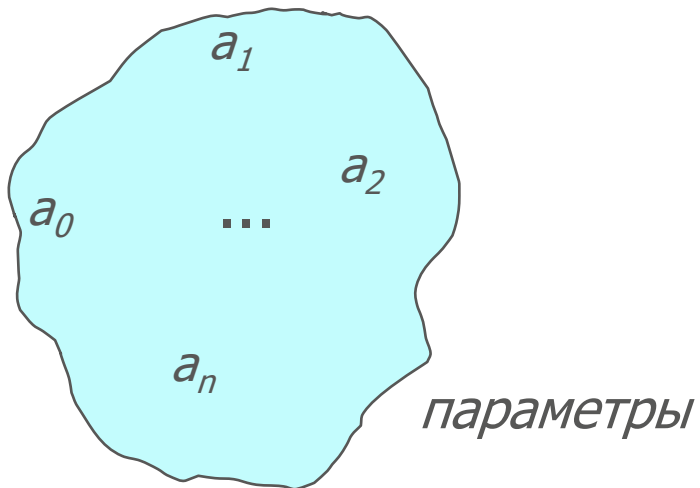
Формально: $M = (W, AP, R, L)$, где:

- W – множество состояний (возможных миров)
 - W_0 - множество начальных состояний
 - AP – множество атомарных утверждений
 - $L: W \rightarrow 2^{AP}$ – функция пометок
- $R \subseteq W \times W$ – бинарное отношение ‘*достижимости*’ на множестве миров

Структуру Крипке это описание в котором состояния (возможные миры) помечены отдельными «атомами» – именами фактов, истинных в этих мирах.

ОПЕРАТОРА \Box И КВАНТОРА ВСЕОБЩНОСТИ \forall БИНАРНОЙ ЛОГИКИ

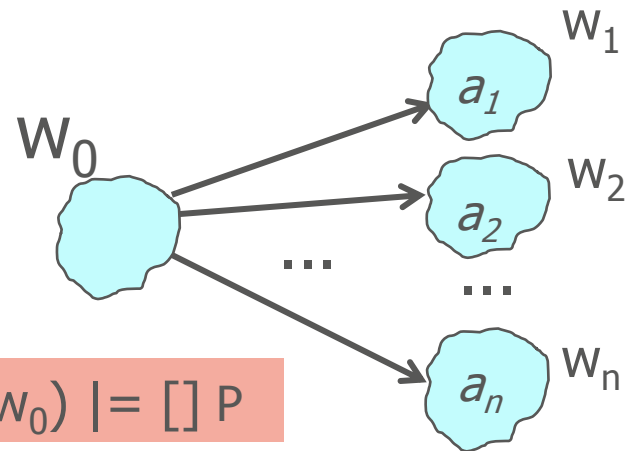
- Семантика квантора \forall бинарной логики предикатов



Универсум

$(\forall a \in A) P(a)$ истинна, если для всех $a_i \in A, P(a_i) = И$

- Семантика оператора \Box модальной логики



$(M, w_0) \models \Box P$

$\Box P$ выполняется в мире w_0 структуры Крипке M , если **во всех мирах** $w_i \in W$, **ДОСТИЖИМЫХ** из w_0 , P истинно в w_i

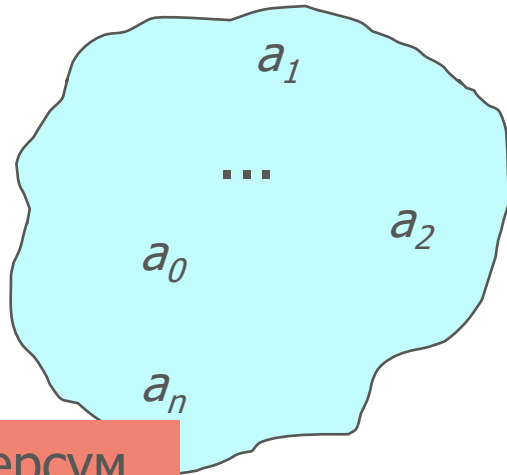
- Модальный оператор \Box можно рассматривать как АНАЛОГ квантора \forall . $\Box P$ означает $(\forall w \in W) P$, где квантор берется по всем мирам (ситуациям, состояниям, моментам времени и т.п.), достижимым из W_0 .



ПОЛИТЕХ

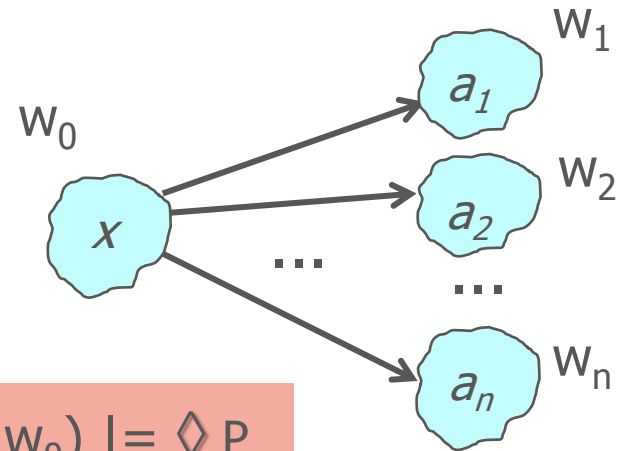
ОПЕРАТОРА 'РОМБ' \diamond И КВАНТОРА СУЩЕСТВОВАНИЯ \exists БИНАРНОЙ ЛОГИКИ

- Семантика квантора \exists бинарной логики предикатов



$(\exists a \in A) P(a)$ истинно, если существует такое $a_i \in A$, что $P(a_i)$ **ИСТИННО**

- Семантика оператора \diamond модальной логики



$\diamond P$ истинно в мире w_0 структуры Крипке M , если **существует такой мир** $w_i \in W$, **ДОСТИЖИМЫЙ** из w_0 , что P истинно в w_i

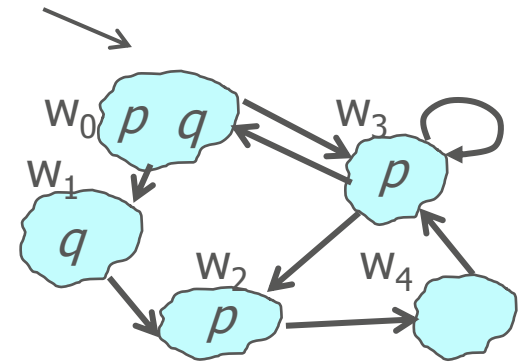
- Модальный оператор \diamond можно рассматривать как АНАЛОГ квантора \exists логики предикатов: $\diamond P$ означает $(\exists w \in W)P$.



Возможные миры Крипке, в зависимости от задачи, могут рассматриваться, как:

- возможные жизненные ситуации;
- возможные положения дел;
- возможные состояния динамической системы;
- позиции на шахматной доске;
- мгновенные состояния системы в моменты времени;
- метафизические возможные миры;
- возможные миры научной фантастики
- состояния памяти компьютера;
- варианты раздачи карт в карточной игре;
-

M::

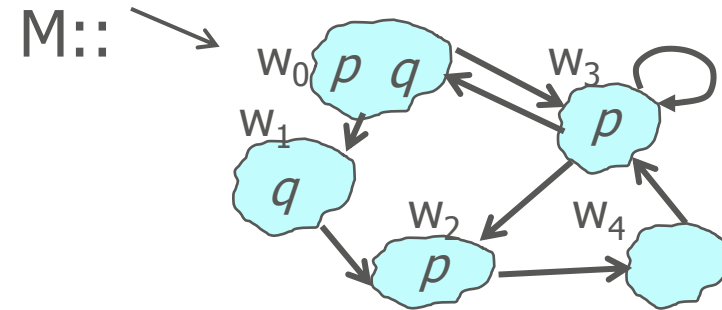




Отношение достижимости структуры $R \subseteq W^2$

- Отношение достижимости структуры Крипке при различных интерпретациях возможных миров может представлять:

- *информационное отношение между ситуациями – что агент может видеть (знать);*
- *отношение между моментами времени (шаги времени);*
- *родственные отношения между людьми;*
- *отношение соседства точек пространства;*
- *отношение переходов в геометрической интерпретации машинных диаграмм или процессных графов;*
- *.... ..*





ЗАДАНИЯ, КОТОРЫЕ БУДУТ НА ЭКЗАМЕНЕ

- Проверьте выполнение данной модальной формулы во всех мирах заданной структуры Крипке M.

Примеры модальных формул:

а) $\diamond [] (\varphi \ \& \ \psi)$;

б) $[] \diamond (a \ \& \ b)$;

в) $\diamond [] \diamond (a \ \vee \ b)$.