ПОЛИТЕХ

# ИНСТИТУТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК И ТЕХНОЛОГИЙ

ВШ ИСКУСТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

## курс: Введение в профессиональную деятельность

### ТЕМА 2. МАТЕМАТИКА КАК МЕТАФОРА

ЛЕКЦИЯ 7 : *ДИАЛЕКТИКА КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК : «ПОНЯТЬ НЕЛЬЗЯ ВЫЧИСЛИТЬ»*

13 ноября
2025

## Что было на прошлой лекции
## Фундаментальные принципы - «числовая» аргументация

- Фундаментальные принципы (аргументация Геделя): **Каждому высказыванию** (например, любой программе на языке программирования) можно поставить в некоторое число и …. наоборот.
- Итак: .

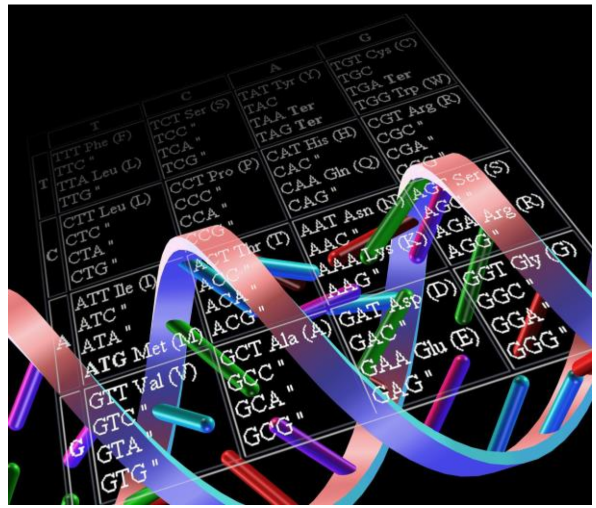
1. если, есть фраза на русском языке: «**два плюс два равно четыре» , которая** использует k различных символов, алгоритм нумерации Геделя каждому символу сопоставит цифру в k-ичной системе счисления.
2. поскольку программа — это последовательность символов, её можно считать записью некоторого числа в k-ичной системе счисления.

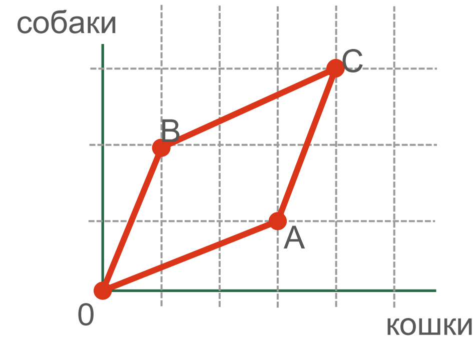
тезиса Чёрча:

*Числовая функция тогда и только тогда алгоритмически ( с помощью компьютера) вычислима, когда она частично рекурсивна.*

# Обсуждали также вопрос: все ли можно «пересчитать» , а значит вычислить ???

Генетический код — символьная форма записи наследственной информации в живой клетке, с помощью 4-х букв (в данном случае К =4). ДНК код рибосомы используют для «вычисления» различных молекул белков – материальных объектов.






**..значит «0=1/2» ???**

Действия «законов Природы» на материальные объекты можно:

- наблюдать, проводя конечное число физических экспериментов,
- результаты наблюдения можно объяснять, используя конечное число мыслимых «абстракций»
- из абстракций (слов некоторого языка) можно «собирать» модели материальных объектов и с их помощью «вычислить» то, что можно объяснить, используя конечное число мыслимых «абстракций»

# Диалектика КН: понять нельзя вычислить

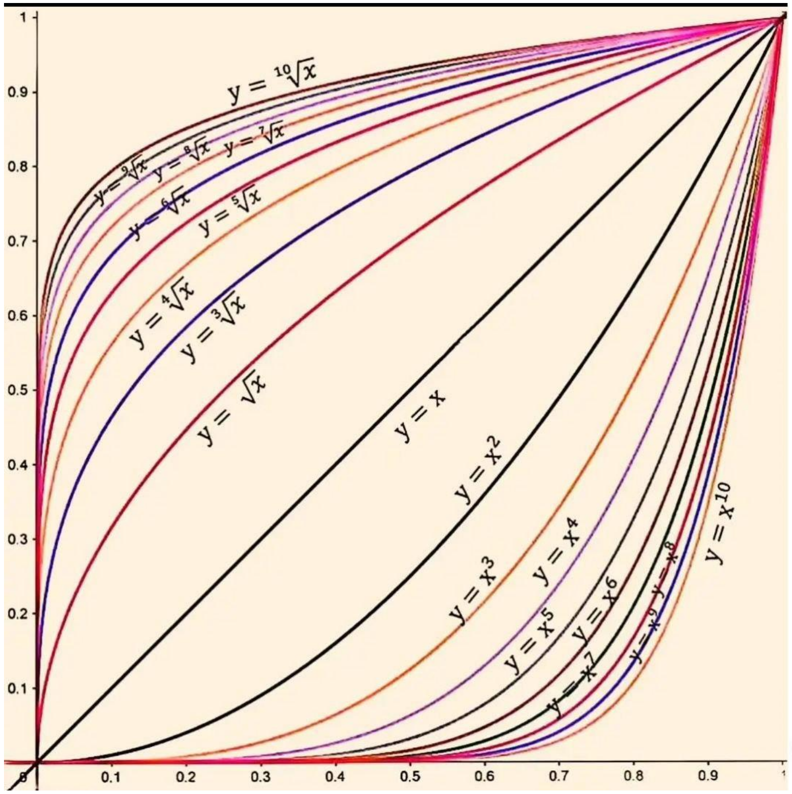
Язык – суть конечное множество слов-понятий, которые имеют значение : понять – «что» ?; вычислить – «как» ?? и «где» ,,,.???

**Научные абстракции: «высказывание» и «объяснение»:**

- **Высказывание: «**любая масса имеет связанную с ней энергию, и наоборот». Чтобы этому высказыванию присвоить значение «истинно или ложно» надо доказать масса «имеет числовую серу» и существует формула для вычисления энергии…. (но почему нет формулы для вычисления «смысла» или того, что есть «истина»???)
- **объяснение** это высказывание, но которое не нуждается в формальном логическом доказательстве истинности или ложности, являясь аналогом понятие «аксиома». Аксиома не требует доказательства !!! ???….

***истина** (выраженная на языке системы) не определена в самой системе*

*А. Тарский*




**Я все время жду!!!!!..... КОГДА ????.... В какой момент моей жизни мне это пригодится ???!!!..............**

$$L=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{\frac{5x}{2}}\cdot\frac{5}{2}\right)^2}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x=\operatorname{tg}t,\ dx=\frac{dt}{\cos^2 t}\\ \sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\cos t}\\ \begin{array}{c|c|c} x & \sqrt{3} & \sqrt{8}\\ \hline t & \frac{\pi}{3} & \operatorname{arctg}\sqrt{8}\end{array}\end{array}\right|=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{8}}\frac{dt}{\cos^2 t\cdot\operatorname{tg}t\cdot\cos t}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{8}}\frac{\sin t\,dt}{\cos^2 t\cdot\sin^2 t}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{8}}\frac{d(co}{\cos^2 t\cdot(c}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{8}}\left(\frac{1}{\cos^2 t-1}-\frac{1}{\cos^2 t}\right)d(\cos t)=\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\right|+\frac{1}{\cos t}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{8}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}\right|+3-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}\right|-2=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+1.$$

*Ответ:* $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+1.$

ПОЛИТЕХ

# ВСЕ ЛИ ПРИРОДНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ЗАПИСАТЬ НА ЯЗЫКЕ МАТЕМАТИКИ ?

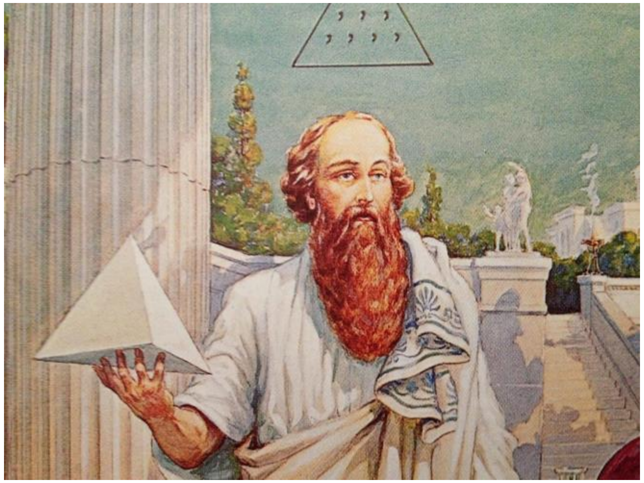
Физические процессы, можно описать с помощью «специальных функций» , которые не выражаются в элементарных функциях,

но для **процессов мышления** (сознания, интеллекта..) множества «специальных функций» до сих пор не придумано - … символьная запись отношений между абстрактными понятиями (красиво) и объектами природы (цветок) формально не выразима ….. .

Точка зрения компьютерных наук: мышление есть «вычислительный» процесс, который следует законам природы, но чтобы «записать формулу мышления» нам пока не хватает знаний.

# It from bit - «Информация это **различие**, которое **имеет значение**»

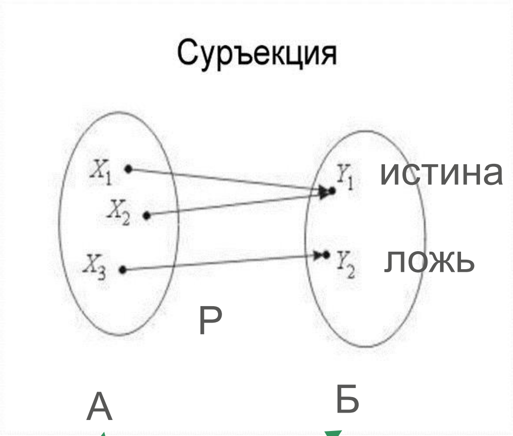
- Идея Геделя: различие должно быть «вычислимым», а **программу вычислений** можно считать особой формой записи некоторого числа ….
- **итак:** каждому числу можно поставить **в соответствие <u>программу</u>**, которая описывает функцию, **вычисляющую это число**.
- Итого: любой **содержательной программе сопоставляется** конкретное число (число Геделя), принадлежащее «числовому полю» - подмножеству множества натуральных чисел N.



- Пифагор: все есть число

«Суть этой фразы в том, что всё можно измерить».

## ЯСНО, ЧТО ВСЕ ДЕЛО В ЯЗЫКЕ:
## ЛИНГВИСТИЧЕСКИЙ ПОВОРОТ КН




Если есть множество Т – текст, состоящий из строк символов алфавита А, то:

- из Т можно выделить подмножество **высказываний** — грамматически правильных текстов, которые являются входными данными **алгоритма** (функции) **Р**, сопоставляющей всем элементам **В** одно из двух значений: ИСТИНА или ЛОЖЬ

**Итак:** **«алгоритм»** как последовательность инструкций («программ»), которая *за конечное число шагов* переводит входные данные в результат (выходные данные) => булеву функцию (истинно или ложно).

# Тезис Тьюринга (на множестве целых чисел)

- Любой вербальный алгоритм в алфавите *M* может быть реализован некоторой машиной Тьюринга, работающей над алфавитом *M.*
- **Тезис Черча-Тьюринга**. Всякая интуитивно вычислимая рекурсивная функция является вычислимой по Тьюрингу.

*Теорема .* Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ рекурсивна тогда и только тогда, когда она вычислима по Тьюрингу.

# О вычислимости истины

- В настоящее время **вычислимость** - это **способность эффективно решать некоторую проблему с помощью алгоритмов, вычисляющих числа**.
- Вычислимость связана с существованием алгоритма вычисления выражения, имеющий номер из «нумерации Геделя».
- В настоящее время изучены модели вычислимости по Тьюрингу (в поле целых чисел) однако, для функций с рациональными или действительными аргументами **понятие вычислимости** требует до определения и дальнейших исследований

# Определения

- Функция $f : N \to N$ называется вычислимой, если существует алгоритм P, который на любом входе $n \in N$ выдает $f(n)$.
- под записью $f : A \to B$ мы будем понимать т.н. частичные функции, **то есть функции, которые** на некоторых аргументах $n \in A$ функция $f(n)$ может быть не определена.
- Для тех аргументов $n \in N$, для которых $f(n)$ не определено, алгоритм P при этом не выдает никакого значения на выход.
  - Функция $f(n) = 2n$ вычислима. Алгоритм: умножить число 2 само на себя n раз.
  - Функция $f(n) = [\log n]$ (не определенная для $n = 0$) вычислима:

- Пример: композиции вычислимых функции вычислимы

$2^{n2}$ , $2^{2n}$,$[\log n]^n$

ПОЛИТЕХ

# КОММЕНТАРИЙ: ПОНЯТИЕ РАЗРЕШИМЫХ МНОЖЕСТВ

- Множество **натуральны чисел** X называется **разрешимым**, если существует *алгоритм*, который по **любому натуральному n** определяет, принадлежит ли это **n** множеству X.

Определение: множество X разрешимо, если его **характеристическая функция f(n) то есть**

f（n）=（if n E X then 1 else 0 ）вычислима.

Вопрос: существуют ли неразрешимые *множества* ?

Ответ: да, потому, что алгоритмов вычисления характеристических функций разрешимых подмножеств натурального ряда счетное число, а всех подмножеств натурального ряда несчетное число..

# Уточнение

**Уточнение:** Множество $A \subseteq N$ называется разрешимым, если существует алгоритм, который для всякого входа $n \in N$ выдает 1, если $n \in A$, и выдает 0, если $n \notin A$ .

**Определение**. Характеристической функцией множества $A \subseteq N$ называется функция $\chi A : N \to \{0, 1\}$, для которой

$$\chi A(n) = 0 \ , \ n \notin A$$

$$\chi A(n) = 1 \ , \ n \in A,$$

**Лемма** . Множество $A \subseteq N$ разрешимо тогда и только тогда, когда функция $\chi A$ вычислима.

**Теорема Поста**: разрешимые множества - это перечислимые множества с перечислимыми дополнениями.

(Множество $A \subseteq N$ разрешимо тогда и только тогда, когда оба множества $A$ и $N \setminus A$ перечислимы)

пустое множество — единственное множество, имеющее ровно 1 подмножество (само себя), и единственное множество, равномощное любому своему подмножеству.

$$\varnothing$$

**Пустое множество тривиальным образом является разрешимым** (а значит, перечислимым и арифметическим),

# Методологический комментарий перечислимое множество

- **Определение** . Множество A ⊆ N называется перечислимым, если существует алгоритм P , который вычисляет все элементы этого множества. Всякий элемент A вычисляется через конечное число шагов работы алгоритма P.

- Замечание 1. Важно, чтобы в последовательности результатов работы алгоритма P ничего, кроме элементов A, не встретилось.
- Замечание 2. Понятие перечислимости более широкое, нежели понятие разрешимости.

- **Лемма** . Если множество A ⊆ N разрешимо, то оно перечислимо.

# УТВЕРЖДЕНИЯ

- Утверждение . Если множество S перечислимо, то оно является множеством значений некоторой вычислимой функции.
- Утверждение . Если множество S является множеством значений всюду определённой вычислимой функции, то оно перечислимо.

## Итак: компьютерные исчисления - среда, где выполняются физические операции над абстракциями

- Арифметика (сложение, умножения чисел ) гипотез авс
- Векторная алгебра (конечномерное сложение векторов )
- Функции (бесконечномерные вектора)
- Алгебра Ли (операция коммутирования)
- Аксиома выбора

  – Квайн – программа которая печатает саму себя-
  «**Куайн**» (*квайн*, англ. *quine*) — компьютерная программа, которая выдаёт на выходе точную копию своего исходного текста. Куайны возможны в любом тьюринг-полном языке программирования — как следствие теоремы Клини о рекурсии

# РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЯ «ВЫЧИСЛИМОСТЬ»

- машин Тьюринга (А. Тьюринг, 1936 г.);
- машины Поста (Э. Пост, 1943 г.);
- нормальных алгорифмов Маркова (А.А .Марков, 1950);
- МНР-вычислимых функций ( Х. Стерджис, 1963)

Если функция не вычислима в соответствии с каким-то из указанных подходов, то она не может быть вычислена в рамках иной другой из указанных формализаций

Формализация понятия «алгоритм» позволяют говорить и о существовании алгоритмически неразрешимых проблем.

# Феномен натуральных вычислений

- **Тезис Черча-Клини** : класс интуитивно вычислимых функций» совпадает с классом «частично рекурсивных функций»
- Если функция *f(x)* – не является частично-рекурсивной, то она не является интуитивно вычислимой, а потому ее вычисление является «алгоритмически неразрешимой проблемой».
- Факт: среди множества интуитивно вычислимых функций, не нашлось ни одной, о которой можно было бы сказать, что она не принадлежит к классу частично рекурсивных функций.

- Диалектика КН: На всех уровнях описания Природы, начиная с атомов, молекул, простейших клеток, живых организмов, физические процессы и структура объектов неразрывно связаны между собой через … программы «натуральных вычислений» .

# Итак

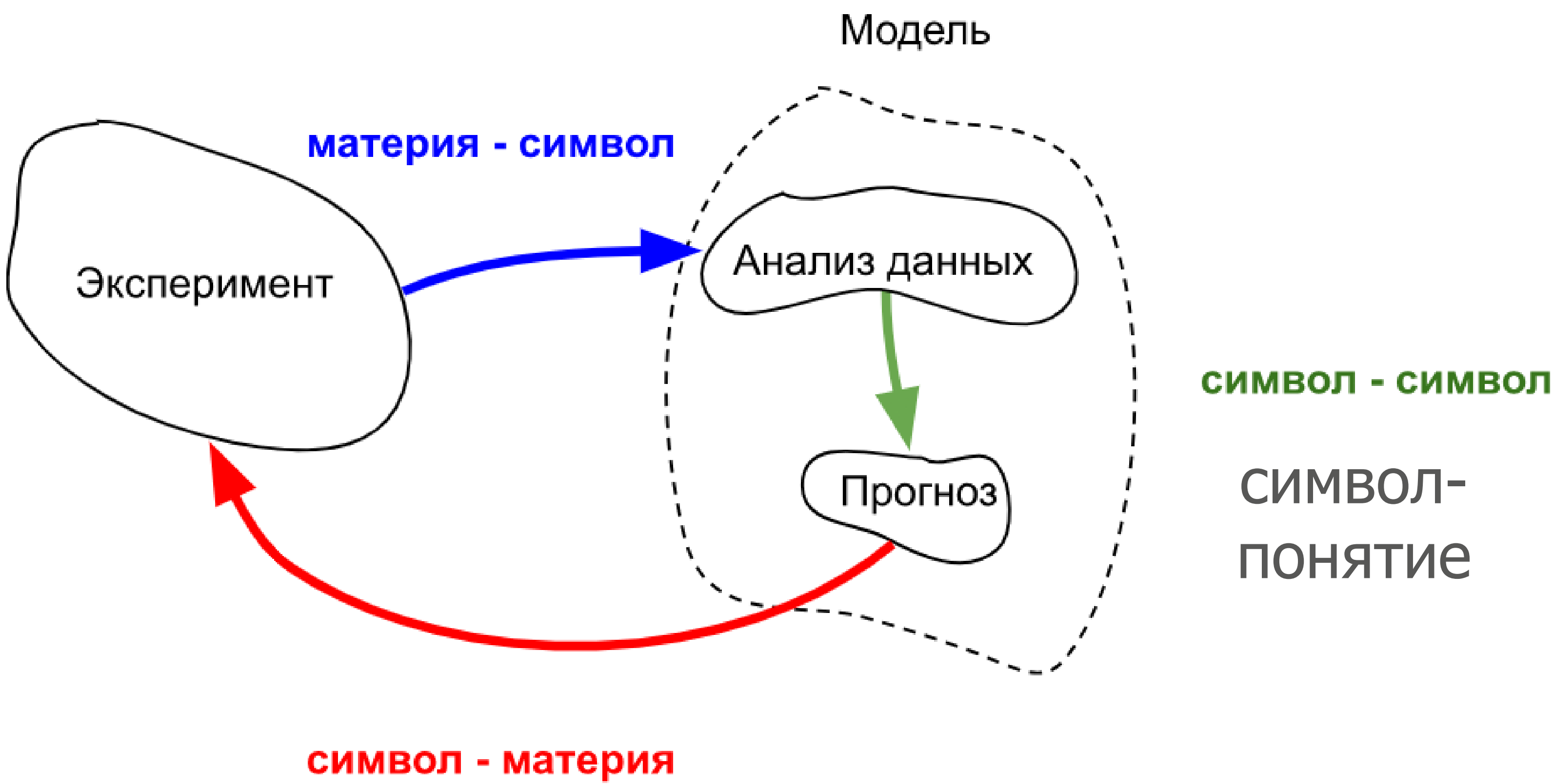
physical systems are *effectively* physical computers ,,

Компьютерные науки призваны преодолеть разделение когнитивных процессов и процессов «вычисления» материи

В физической среде наблюдается стремление к состояниям с минимальным значением полной потенциальной энергии, но результат некоторого физического процесса *можно использовать* в качестве решения некоторой когнитивной задачи.

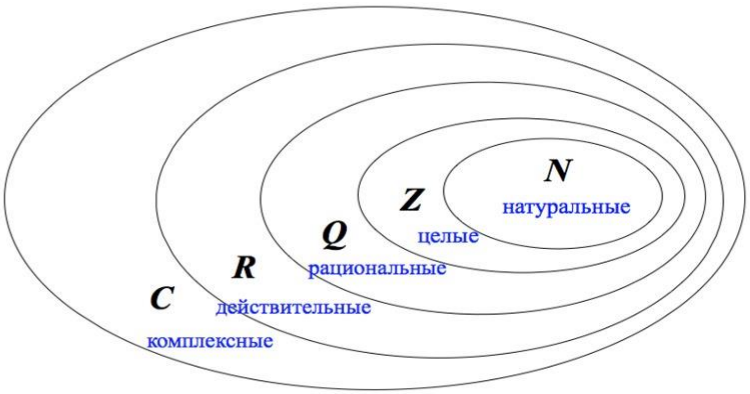
КН нужны для того, чтобы понять, решение какой именно задачи наблюдаем в данном физическом явлении.

# Семиотическое замыкание



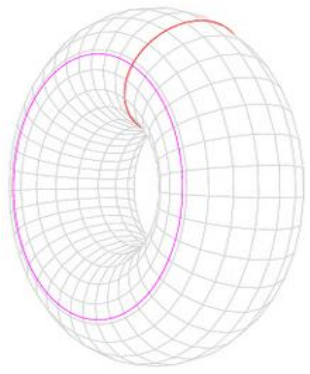

десигнат — **предмет, обозначаемый собственным именем некоторого языка**, или **класс предметов, обозначаемых общим (нарицательным) именем**.

# Математика –искусство давать разным вещам одно название
А. Пуанкаре



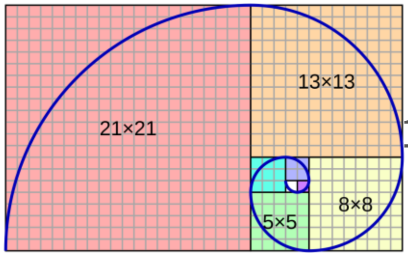

аксиомы Архимед:
в Природе нет бесконечно малых и. бесконечно больших чисел..

Для тора **первое число Бетти** равно b1 = 2, что интуитивно можно представить как **количество круглых «отверстий»**



Вопрос

– Можно ли **смысл** высказывания (математического , лингвистического) выразить (**натуральным N числом , вещественном числом, вектором, матрицей, графом, тензором, числом Геделя, числом Фибонначи, числом Бетти, числом Бернули….** ?




числа Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 и 21.

# ИТАК

- Числа Геделя принадлежать подмножеству множества натуральных чисел N.
- Каждому числу, входящему в нумерацию Геделя, отвечает «правильная» программа или функция, которая вычисляет это «число Геделя».
- Можно считать, что «неправильные» программы, которые не входят в нумерацию Геделя, вычисляют **нигде не определенные функции**.