ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

ИНСТИТУТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК И ТЕХНОЛОГИЙ

ВШ ИСКУСТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

курс: Введение в профессиональную деятельность

Тема 2. Математика как метафора (явления vs представления)

Лекция 5 : теоретический минимум компьютерных наук (2)

7.03.2024

Содержание

- О чем говорили и что обсуждали на прошлой лекции № 4
- Введение к лекции № 5
- «Теоретический минимум» в терминах логики теорем Геделя и топологии множества понятий
- Заключение

На прошлой лекции вспомнили, что говорили основоположники и какие задачи они ставили

Д. Гильберт:

«Не существует такой вещи, как неразрешимая задача»

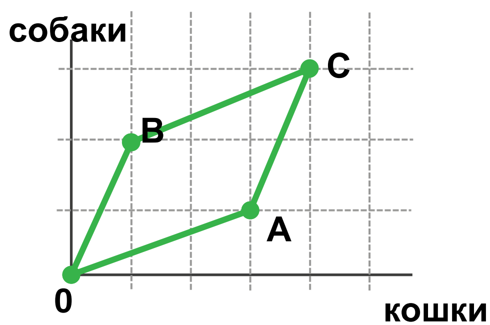
фундаментальные задачи компьютерных наук:

- **Перечислимость** (множества {N}: есть алгоритм $n_i=q(x, y,\dots,z)$)
- **Вычислимость** (функции $f(n_i)$ за конечное число шагов алгоритма)
- **Разрешимость** (множества {N}: существует функция $f(n_j)=\{0,1\}$)
- **Объяснимость** (интерпретируемость) решений ???!!!

К. Гедель:

если арифметика непротиворечива, то в ней невыводима (невычислима) формула, содержательно (с точки зрения «смысла») утверждающая непротиворечивость этой арифметики.

Продемонстрировали также двойственность арифметического пространства: дискретное vs непрерывное



B= 1 кошка и 2 собаки

A= 3 кошки и 1 собака

C= A+B=4 кошки и 3 собаки

На прошлой лекции обсудили, почему «трудные проблемы физики …. имеют информационную природу… » ?

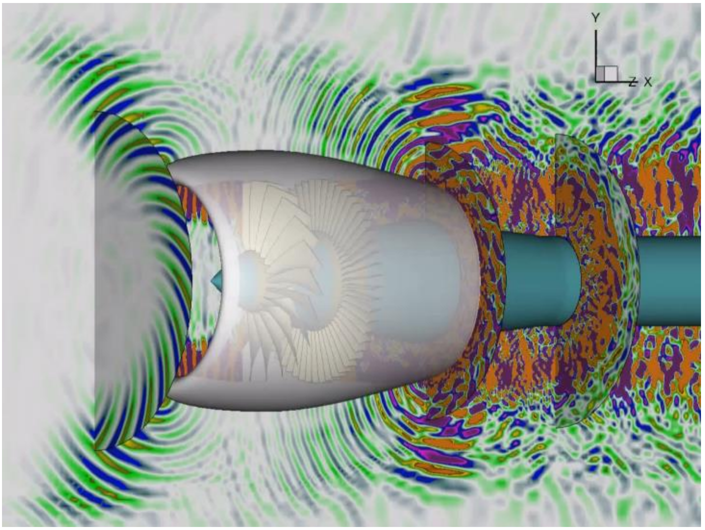
- Любая формальная теория сложности оперирует **усредненным числом равновероятных вариантов выбора из множества** возможных результатов… Как осуществить «правильный выбор» ?

Необходимо использовать понятия

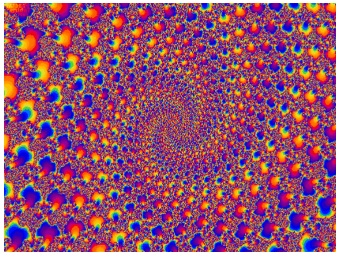
- «перечислимость»: изучаемое множество есть область значений вычислимой функции (то есть имеется алгоритм порождения элементов множества {N})
- «разрешимость» : характеристическая функция множества {N} f(nj)={0,1}) вычислима (следствие 10-ой проблемы Гильберта: любое разрешимое множество перечислимо, но не наоборот).
- **Бинарная логика оценки «ДА|Нет»** результатов сложных вычислений **ведет к потере информации и, как следствие, к росту энтропии возможных решений.**

- Согласно теореме Эрроу любая «сложная» система выбора из множества возможного ведет к «парадоксу диктатора» ….

«правильное решение» можно построить на механизме рекурсии



воспринимаемые/доступные органам чувств данные «имеют как количественную меру, так и форму – in_forma_tion».



Введение: «Датафикация» реальности и проблема «тождества»

- Физическая реальность - суть совокупность объектов и процессов, о которых человек судит на основе д**оступных для наблюдения или измерения данных** (лишение человек данных- одна из форм наказания)
- К объектам физической реальности применим фундаментальный принцип "**тождества неразличимых**"

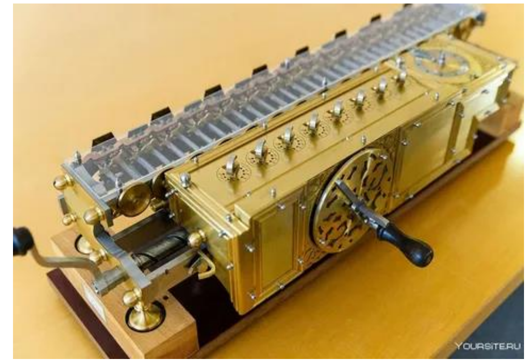
.

Готфрид Лейбниц

- Суть этого принципа в том, что любые два физически неразличимых объекта (субстанции) неизбежно совпадут, став тождественным объектом (субстанцией).
- Возможность различать одни объекты природы от других неизбежно требует, что объекты являются носителями некоторой меры разнообразия, т.е. difference that make a difference* - другими словами, **информации**

ИСТОРИЯ ФОРМАЛИЗАЦИИ ЗНАНИЙ И ФОРМИРОВАНИЯ «АЛФАВИТА ЧЕЛОВЕЧЕСКИХ МЫСЛЕЙ» Г. ЛЕЙБНИЦЕМ

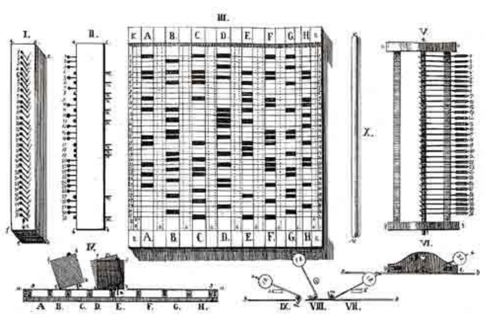
- Возможность существования и формирования «алфавита человеческих мыслей» допускал Г. Лейбниц (1646 – 1716) – создатель системы двоичной системы, дифференциального и интегрального исчисления, закон сохранения энергии.
- Создал механический калькулятор, который кроме сложения и вычитания мог , умножать, делить, а также извлекать из произведения корни и возводить числа в степень
- Лейбниц обосновал идею необходимости создания языка из слов которого можно сформировать смысловой базис науки и различных комбинаторных преобразований из слов, которые сохраняют смысл предложения.



Обосновал идею целостности органических систем, принцип несводимости органического к механическому, доказал, что любой организм может являеться биологической запрограммированной машиной

Исчисление смыслов: «идеоскоп» С. Н. Корсакова – моделирование мыслительной деятельности

- Изобретенные Семена Николаевича Корсакова (1787-1853). Механическая машина позволяют находить, сравнивать и классифицировать множества информационных записей (идей) по набору многочисленных признаков (деталей), позволяя находить:

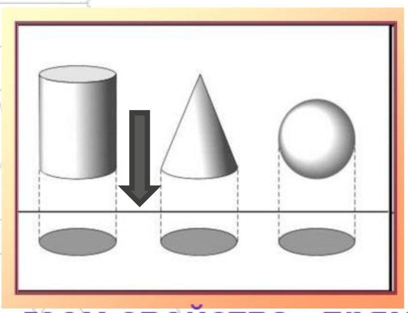


- 1) все соответствия, которые есть у сравниваемых **идей** при их соприкосновении; 2) все то, что находится в заданной идее, но отсутствует в той **идее**, с которой ее сравнивают, в сей момент; 3) все то, что отсутствует в заданной **идее**, но есть в той идее, с которой ее сравнивают; 4) все то, чего нет ни у одной, ни у другой **идеи**, но есть у других идей из той же таблицы

Два подхода к описанию реальности:

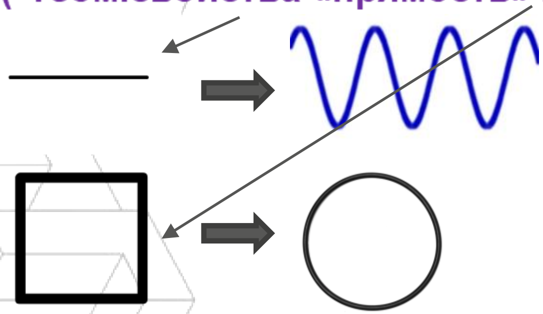
Эрлангенская программа Ф. Клейна: **Свойства реальности выражаются через преобразованиями, которые можно делать с объектами этой реальности, но** ***так, чтобы сохранялись их «базовые» свойства.***

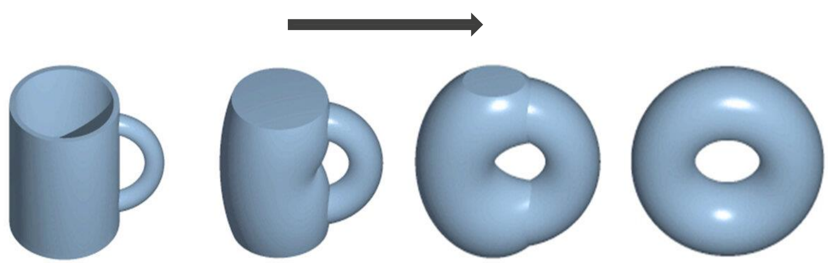
Пример: евклидова геометрия: ***базовое (сохраняемое или*** **инвариантное*) свойство задается алгебраически с помощью формулы*** $x^2+y^2=r^2$ ***вне зависимости от масштаба этого рисунка:***



В топологии или геометрии на «резиновой поверхности» разрешены любые деформации объектов, но без разрывов и пересечений:

(геом.свойства «прямость» и «квадратность» не сохраняются)

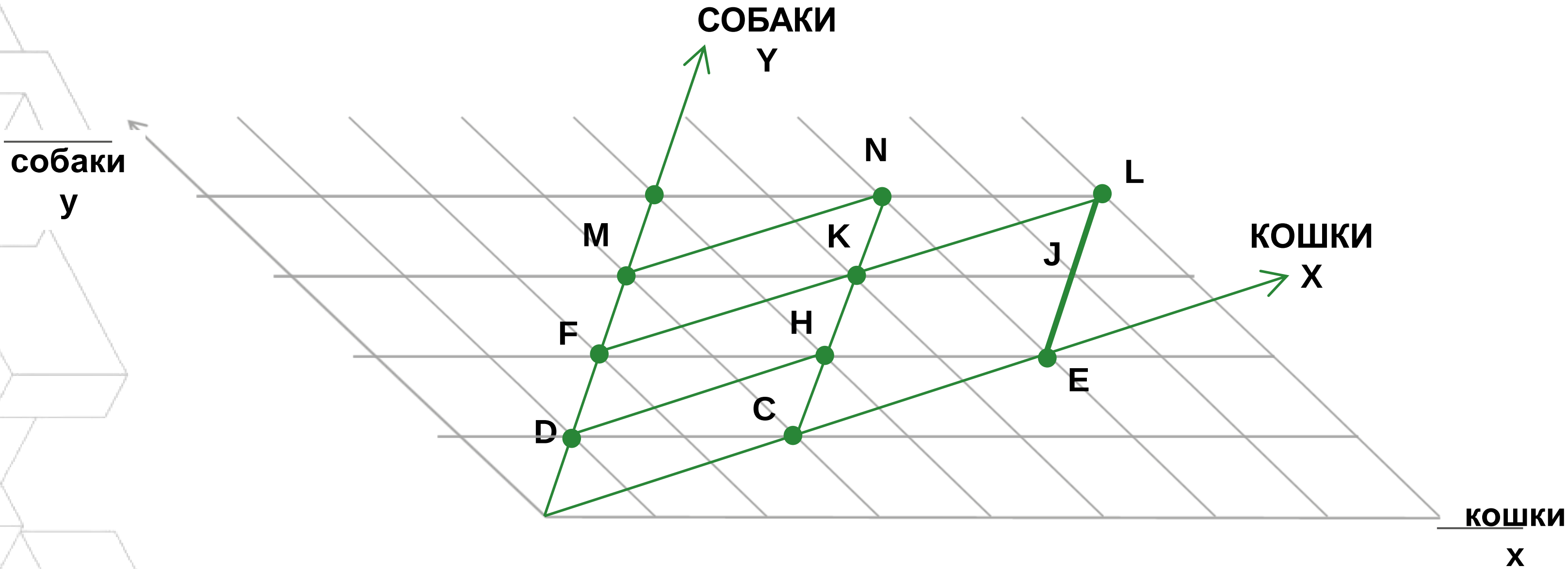




Инвариантные «топологические» свойства реальности: «дырка», «край»...

К ПОНЯТИЮ ИНВАРИАНТНОСТИ: АЛГЕБРА ПЕРЕХОДА К РАЗНЫМ КООРДИНАТНЫМ ОПИСАНИЯМ РЕАЛЬНОСТИ

логический (отдельные аксиомы описания) и наглядный (свойства целостности, сохраняемые при преобразованиях)

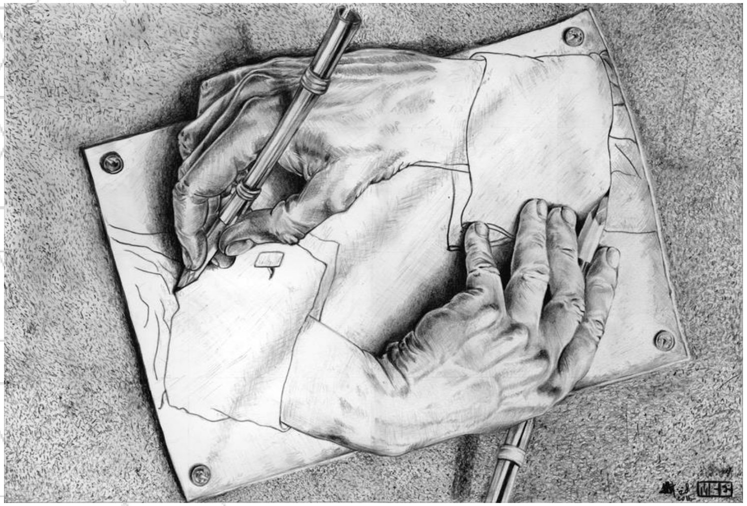


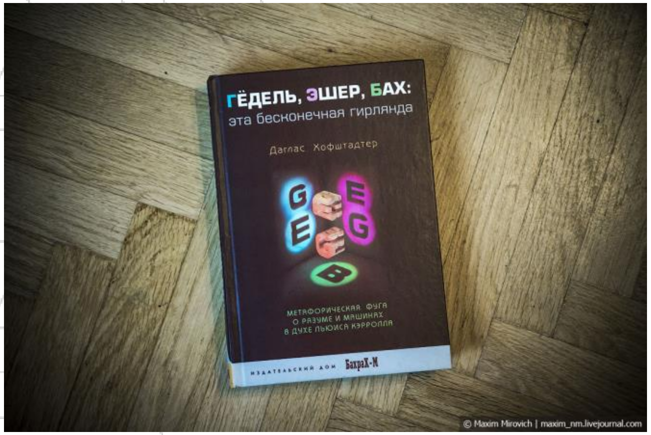
Базовые свойства объектов сохраняются при переходе от описания объектов в ортогональной системе координат (система Декарта) к косоугольной системе координат (аффинная система), так как обратимы (информация не теряется) их алгебраические описания:

Точка	запись1	запись 2
C	3c+d	C
E	6c +2d	2C
….		
H	4c +2d	C + D

$$\begin{aligned} x &= 3X + Y \\ y &= X + Y \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} X &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ Y &= -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}y \end{aligned}$$

Инвариантность преобразования «величин , форм и …. смыслов»

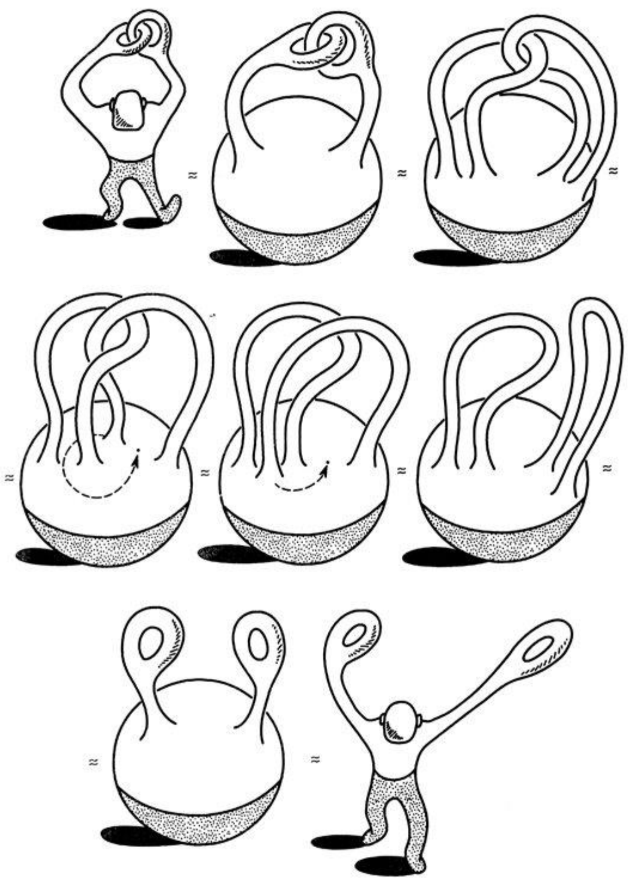




Примеры «само-референции»:

я – это все из чего состоит мое тело,
я – это то, что пережил
я – это мой мозг

НЕПРЕРЫВНОСТЬ VS ДИСКРЕТНОСТЬ



Непрерывность (в обе сторону) и эквивалентность

Математика – язык науки , компьютер – это «шариковая ручка»

Мир не идеален, но .....
Втора проблема Гильберта – доказать, что аксиомы арифметики не могут привести к противоречиям (Решена К. Геделем в 1931 г.)

Цель: Создать систему аксиом с помощью которых можно доказать любое логическое утверждение - предикаты
(a2+b2=c2) Сами аксиомы не доказываются ....(парадокс самореференции)

Итак, есть «аксиома»: это утверждение нельзя доказать оно ложно или истинно ???
«математический код» - 5*X=6

Пример

If (x+1>2) = false, контекст - для x=1

If (x+1>2) =true , контекст - для x=4

x можно обозначить конкретным символом

Идея Гедель: каждому символу и каждой формуле приписать конкретный номер-символ («номерация» Геделя)

Пусть: g(()=1, g())=2, g(,)…, g(*)=6, g(x)=7….

Тогда выражение можно закодировать $G(A^2_1(x_1,x_2))=2^g(A^2_1)*3^g(()*\ldots$

«язык символов» арифметики Пиано

g(x)=4, g(+)=5, g(=)=7

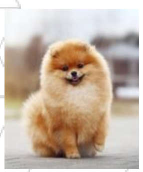
К ПОНЯТИЮ «ВЕЛИЧИНА, ЗНАЧЕНИЕ, СМЫСЛ»

Мощность множества знаков «1» «2»…

Значение: «собака»

знак

количество



контекст

1+2=3	1+3=4
3+1=4	1+2=3
?	??

знак как элемент множества относится к означаемому ПРЕДМЕТУ через составляющую множества «смыслов». Поэтому «смысл» суть –> {множество предметов |ЗНАК | контекст }

Алгебра объектов природы (операции) и смысловой близости

Алгебра изучает множество **символов** и операций с этими символами….

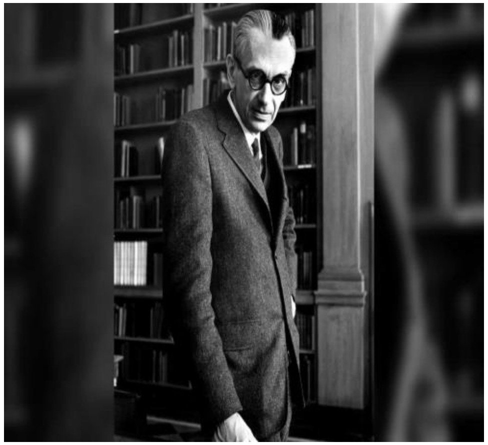
- Понятие алгебраическая система можно рассматривать как множество символов, которые различать и сравнивать, используя различные числовые «метрики» и «формальные» операции:
  - определяя операции над элементами «сложения/умножения»
  - вводя отношения порядка – «больше/меньше/равно»

Топология изучает множества объектов-форм, связанных между собой непрерывным отношением отображения

- Понятия топологического пространства есть множество, между элементами которого устанавливается взаимно однозначное непрерывное отображение

Смыслы «кружки с ручкой» и «тора» совпадают

Возможности арифметических вычислений



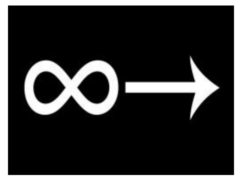
Первая теорема Геделя утверждает, если формальная арифметика непротиворечива, то в ней существует невыводимая и неопровержимая формула.

Вторая теорема утверждает, если формальная арифметика непротиворечива, то в ней не выводима формула, содержательно доказывающая непротиворечивость этой арифметики

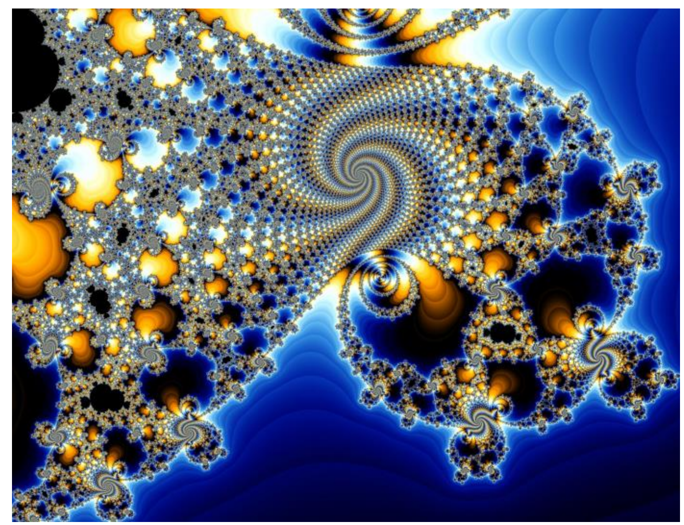
С точки зрения компьютерных наук: любой набор аксиом (машинных команд), который может, реализовать компьютер, будет неизбежно неполным.

ЦЕЛОСТНОЕ ОПИСАНИЕ ПРИРОДЫ: МЕТАФОРМА БЕСКОНЕЧНОСТИ

свойство scale-free или масштабно-топологическое самоподобие - суть ***метрическое свойство множества, согласно которому возможно «передвигаться» в нем как угодно «далеко», оставаясь внутри множества.***



Теорема, любое мыслимое алгебраическое или топологическое понятие (ноумен) может быть реифицировано . Таким образом, понятие может получить статус феномена (объекта) расширенной объективной реальности (расширение реальности в смысле пополнения «Платоновскими телами»)



ГИПОТЕЗА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ РЕКУРСИИ» : ВОСПРИНИМАЕМОЕ VS МЫСЛИМОЕ

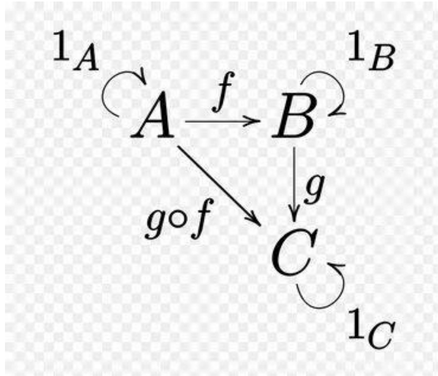
- Суть гипотезы «интеллектуальной рекурсии»: количество (числа) и форма (слова) находятся в отношении рекурсии понятий - **счетно-бесконечных отличительных признаков** воспринимаемых объектов Природы.
- С точки зрения современной математики, состоявшейся **бесконечность** может **мыслиться** в ограниченном метрическом пространстве (множестве). Так, в отрезке [0,1] содержится **несчетное количество** действительных чисел.

- Итого: воспринимаемые человеком **континуальные данные,** являясь элементами четырехмерного (в общем случае фрактального) пространстве-времени R^3xT^1 , **могут эффективно моделироваться (отображаться)** на конечное множество компьютерных чисел.

(см терема Левингейма-Сколема: каждая бесконечная модель счётной сигнатуры имеет счётную элементарную подмодель.)

МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ

- Морфизм - это в общем лучае отображение одной математической структуры в другую структуру, того же типа, сохраняющее исходную структуру
- Гомоморфизм — это отображение алгебраических систем, которое сохраняет основные операции и соотношения.
- $f\colon \mathrm{G} \to \mathrm{H},\ (g,h) \in \mathrm{G} \times \mathrm{H}\colon f \circ g = h \circ f$
- в общем случае *f:* это любые преобразования выполняемые над объектом которые могут быть перенесены на модель, но при этом результаты полученные с использованием модели совпадают с преобразованиями, которые могут быть выполнены на самом объекте.
- Гомоморфизм - способ, который позволяет перейти от избыточного описания объекта к эквивалентному и упрощённому описанию, адекватному цели преобразования.



К ВОПРОСУ ИНВАРИАНТНОСТИ СМЫСЛОВ РАЗЛИЧНЫХ ОПИСАНИЙ

Первая попытка дать исчисление смыслов - идеальных (мыслимых) сущностей, носителем которых могут быть реальные символы или тексты, принадлежит индийской эстетике IX-X **веков**.

Очевидно, что не **все мыслимые понятия** могут быть непосредственно отображены в конечное множество слов, составляющих текст.
И. Кант (1724 - 1804 гг.) - т**о**, что не содержит в себе ничего, кроме познаваемого рассудком, есть «умопостигаемое» или «ноумен», то что доступно восприятию о «феномен»

Ноуменальное представлено с определенной точностью в тексте, поэтому текст можно рассматривать как разновидность смысла.

Смыслы могут быть предметно представлены в речевом потоке слов, но в этом случае одновременно присутствуют многочисленные контексты как компоненты когнитивной реальности (понятия вне текущего потока слов)

Пример: математика «физической» реальности

Если за <u>меру сложности понятий</u> взять «число степеней свободы» понятия, то за «единичную меру» сложности можно взять 1D (одномерную) задачу, аргумент которой может разбит на 100 частей, т.е.:

$$1^{100} = «1»$$

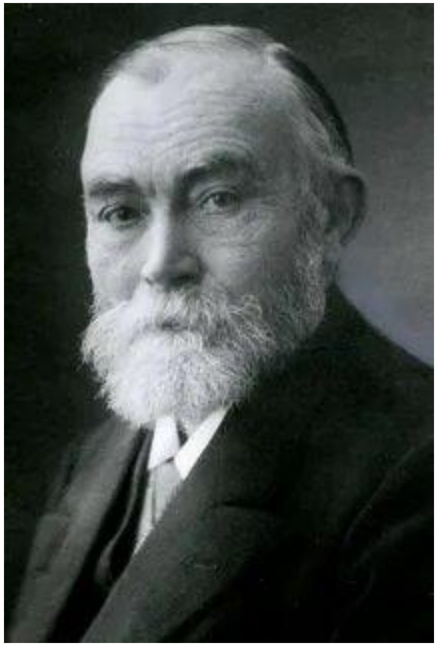
Если 1D «интервал» заменить на «квадрат» 2D , то есть увеличить размерность задача в 2 раза, то мера «сложности» станет

$$2^{100} = 1{,}2676506 \times 10^{30} \approx «1» * \infty$$

Вывод: сложность понятий и вычислительная «реальных» задач науки и техники требует использования <u>специальных инструментов, котрые</u> позволяет решать задачи с заданной точностью за «конечное время» .

СЕМАНТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФРЕГЕ

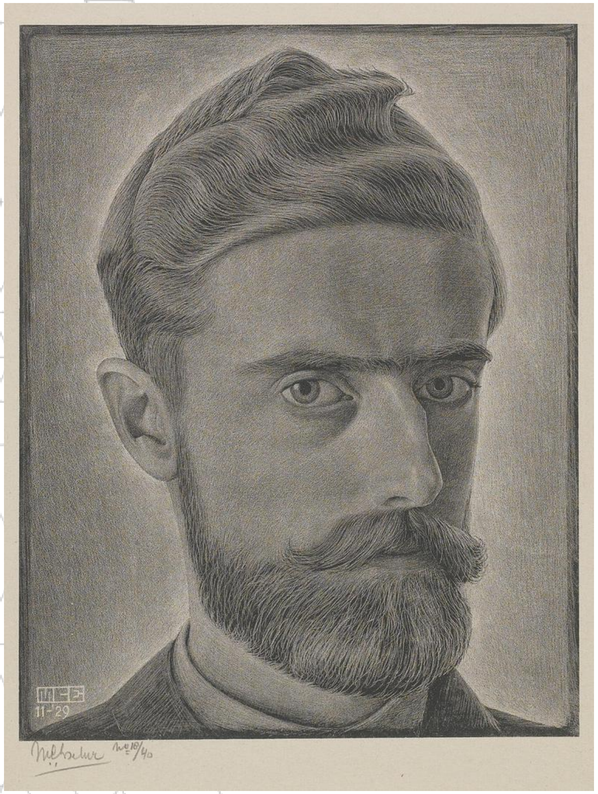
Суть модели: знак может иметь смысл, но не иметь значения (или предмета, который он обозначает).



Не имея предмета, к которому он относится, знак тем не менее имеет смысл.
Например, такими знаками в математике является число π или число $\sqrt{2}$.

Знак не является бессмысленным, даже если он ничего не обозначает. Несуществование предметов, которые обозначают такие выражения, как «круглый квадрат», не мешает нам понимать и считать осмысленными высказывания вроде: «Круглых квадратов не существует».

Пример того, что физически не реализуемо, но… имеет смысл



Мауриц Корнелис Эшер