ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

ИНСТИТУТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК И ТЕХНОЛОГИЙ

**ВШ ИСКУСТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА**

курс: Введение в профессиональную деятельность

# Тема 3. Тема3. Фундаментальные задачи компьютерных наук (КН)

## Лекция 9: от аксиомы выбора к сентенции «it bit"

(*принцип Ландауэра – информация физична ?!*)

**4.04.2024**

# Содержание

- Комментарии к практическим заданиям
- О чем говорили и что обсуждали на прошлой лекции № 8
- Введение к лекции № 9:
- Методология аксиомы выбора
- Основные идеи и базовые принципы теории множеств
- Заключение

## Комментарии к практическим заданиям

(4.04.2024)

1. Личный кабинет
2. курсы
3. Введение в профессиональную деятельность

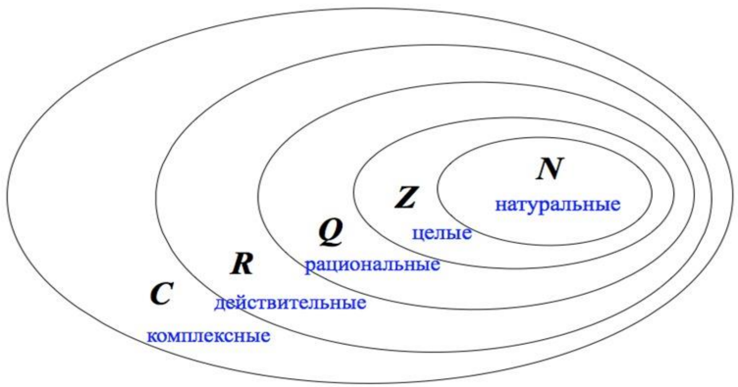
- 166 **ЗАПИСАНО СТУДЕНТОВ**
- 113 **В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ**
- 53 **ПРИСТУПИЛИ**

- **Гвоздева Елена Владимировна**

quine.pptx
28 March 2024, 18:24

# **ЧТО ОБСУЖДАЛИ НА ЛЕКЦИИ 8 :** КОГДА ЧИСЛА ИМЕЮТ НЕ ТОЛЬКО ВЕЛИЧИНУ, НО И СМЫСЛЫ

А где в многообразии чисел найдется «место» для компьютерных чисел с плавающей точкой ?




**Математика – это искусство давать разным вещам одно название**

*А. Пуанкаре*

Смысл аксиомы Архимед:
в Природе **нет бесконечно малых и. бесконечно больших чисел..**

Вопросы на тему:

- Какое **количество** доказательств имеет одно «верное» высказывание ???
- Сколько **бит** информации надо использовать для кодирования **смысла** решения алгебраических уравнений ?
- Можно ли **смысл** уравнения выразить натуральным N **числом** ?

## Обсуждали также методологию «математических» доказательств

Показали, что в основе доказательств, в частности, теорем Гёделя, рассматривается не конкретная математическая формула A(p), которая м.б. неразрешима (противоречива), а высказывается лишь некая посылка (высказывание, построенное на метаданных о формуле A(p)), а именно:

– **если исчисление (система) непротиворечиво, то формула A(p) неразрешима.**

- Фактически в математике речь идет о доказательстве истинности логической импликации, а именно:

  «если система непротиворечива, то формула неразрешима»

- Импиликация – это текст, который кодирует высказывания, область значений – множество {1,0} …
- а если это .множество {0,1,2, е, пи, ….} ????

## НО ТАК И НЕ УТОЧНИЛИ: ОБЪЯСНЕНИЕ ИМЕЕТ ТОЛЬКО «СМЫСЛ» ИЛИ ЕЩЕ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ?

Например, :

- фраза на русском языке: «два плюс два равно четыре» использует k различных символов. Каждому используемому символу можно сопоставить некоторую **цифру в k-ичной системе счисления (исчислении).**
- Поскольку любая программа вычисления — это последовательность символов, следовательно, программу можно считать записью некоторого числа в непозиционной k-ичной системе счисления.

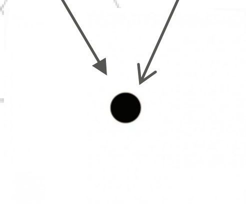
**Вопрос:** есть ли смысл числа ‘e’ в формуле Эйлера: ***«число ‘e’ в степени i, умноженного на пи равно минус единице»****….* (*“…математический аналог фразы — «быть или не быть»* ***)***

Какой смысл использовать троичную систему счисления {-1,0,1} , а не 0,1,2. Есть: представления отрицательных чисел сильно упрощается:

10-1 это 8, а -101 это -8, где минус — это не знак, а часть цифры !!!

# Само-референтность и противоречия в основах математики

**Можно ли из нульмерных объектов (точек), построить не нульмерный протяженный объект, например отрезок конечной длины?**



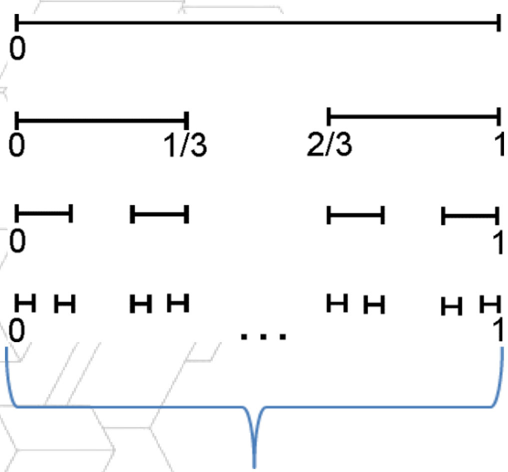
Точка – **множество меры ноль**

когда:

**0*'бесконечность'=1 ???**

**Пример: числа Фибоначчи самореферентны - определяются суммированием двух предыдущих членов ряда**

**но… начальные значения должны быть заданы**

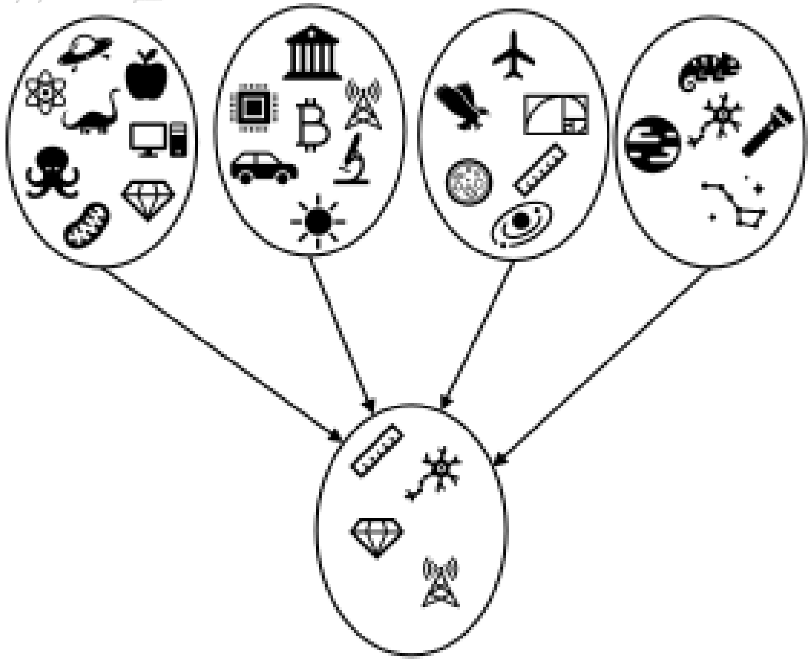



**«Под числом я подразумеваю не столько набор единиц, сколько абстрактное отношение некоторой величины к другой величине того же вида, которую мы принимаем за единицу».**

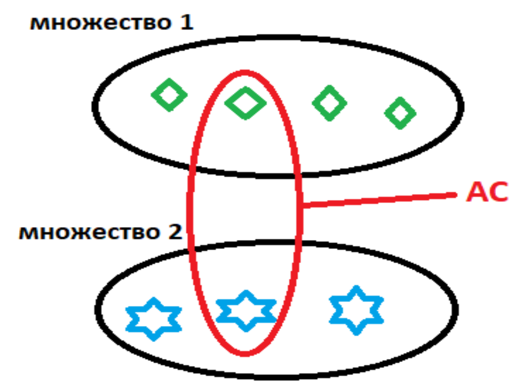
**И. Ньютон**

Канторово множество счётное объединение объектов меры 0

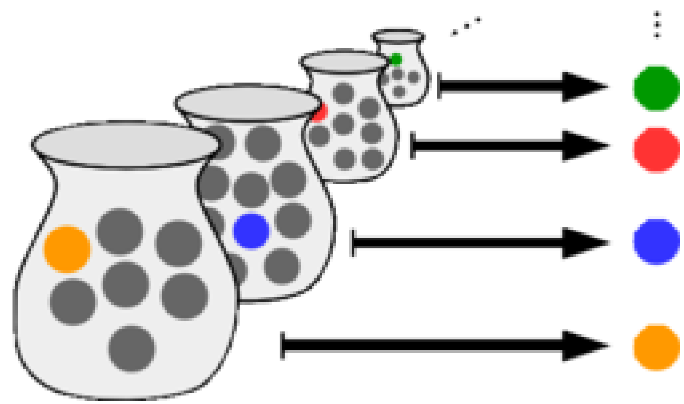
# Введение. Аксиома выбора, *AC* (*Axiom of choice*)



Аксиома выбора (АС) -
имеет простую и логичную формулировку, но с «чудовищные» последствия.
**Формулировка аксиомы**: если существуют два непустых множества, то существует и множество, содержащее ровно по одному эл




С помощью **Аксиомы выбора** можно *разобрать любое множество на (по) элементам*. Очевидно, что конечное или счетное множество (например, множество натуральных чисел) можно разобрать на элементы, но для континуума такая операция не очевидна.



## «Компьютерные» последствия принятия АС

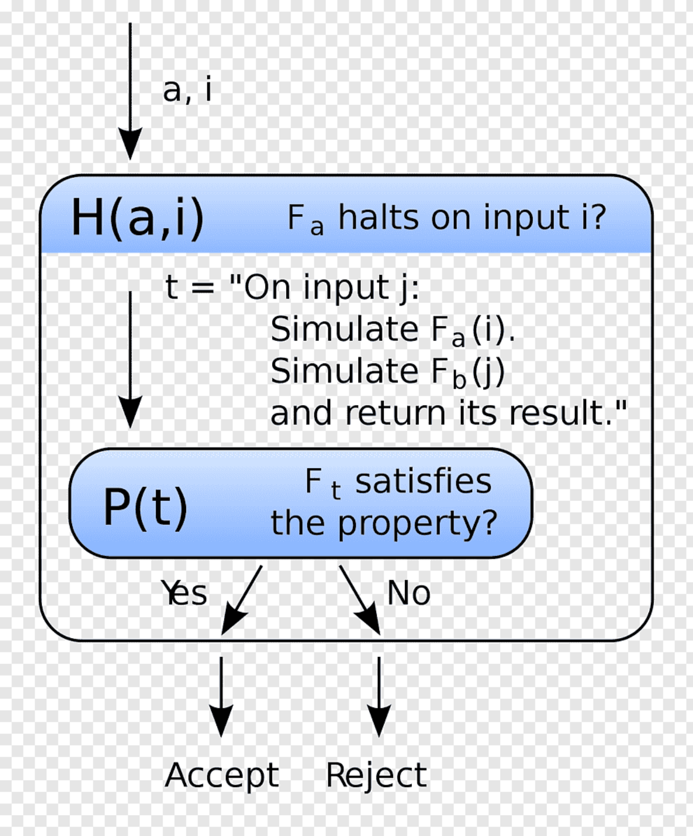
- **Проблема останова** программы: суть проблемы - невозможно разработать общий алгоритм, который бы по исходному коду программы определял, зациклится она или завершится за конечное время

надо различать синтаксис программы и ее семантику.

- синтаксис - это то, как написана программа,
- семантика - это то, как программа ведет себя при «запуске»,

- **Теорема Райса:** невозможно определить свойство программ, которое зависит только от семантики, а не от синтаксиса, если только это свойство не является тривиальным (тривиально значит: true (истинно) или false (ложно) для всех программ).

# Более того




Согласно теореме Райса, невозможно написать программу, которая автоматически проверяет:

- отсутствие ошибок в других программах, принимая программу и ее спецификацию в качестве входных данных
- удовлетворяет ли программа спецификации

**Что же тогда «пишет» Chat GPT ???**

# Аксиома выбора - «генератор парадоксов»

**Аксиома Выбора** известна тем, что рождает математических «чудовищ» или *intangibles* - объектов, существование которых может быть формально доказано, но ни один конкретный пример не может быть приведен.

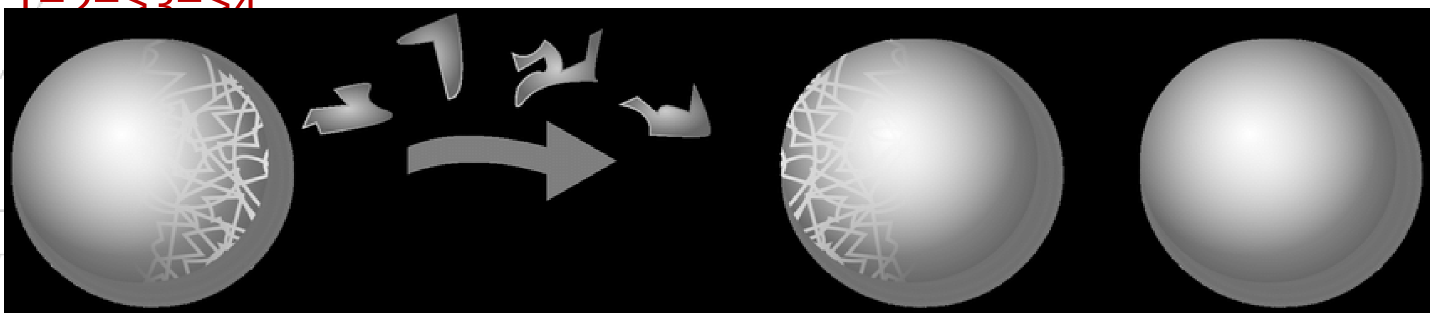
$$\forall \alpha \exists f \left( \forall \beta \left( \beta \in \alpha \wedge \beta \neq \varnothing \right) \Rightarrow f(\beta) \in \beta \right)$$

**АС «простыми словами»:**

*декартово произведение* (*пересечение*) *набора непустых множеств* *непусто*. **То есть при наличии любой «коллекции» множеств, каждое из которых содержит хотя бы один элемент, можно создать новое множество, с помощью функции (алгоритма) выбрав по одному элементу из каждого набора, даже если коллекция** бесконечна.

## **ПРИМЕР МАТЕМАТИЧЕСКОГО «ЧУДОВИЩА»,** ПОРОЖДЕННОГО АС: ПАРАДОКС БАНАХА ТАРСКОГО.

- **Суть парадокса – не материальная, а информационная:** сферу можно разрезать на несколько частей так, что после поворотов из этих частей из них можно **собрать уже две сферы** такого же диаметра как исходная сфера, причем *без зазоров и пустот*! ???? суть парадокса 1=2=>3=>4



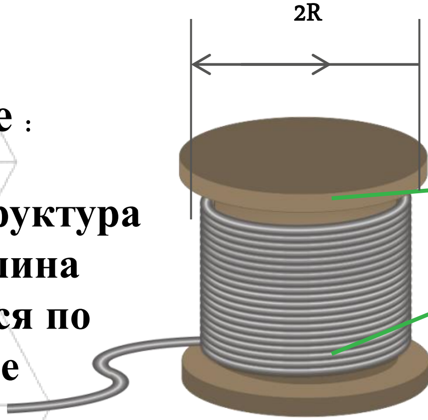
В теории множеств существуют т.н. "**неизмеримые множества**", которые могут не иметь объема, не реализуют свойства аддитивности и эквивалентности

Как такое «клонирование» возможно ?
1. речь идет о свойствах бесконечных множествах,
и напоминает теорию «большого взрыва» – образования из одной точки всей Вселенная,
2. рассматривается, объект=> множество точек, со структурой «сфера»;
инструмент=>абстрактная математика, процесс происходит в 'компьютерном' мире, объект которого => суть информация, а инструмент— «машина Тьюринга». Носителем «информации» м.б. неизмеримое множество, которое не имеет «объема»
3. возможен ли «обратный парадокс Банаха-Тарского»: …**4=>3=>2=1**

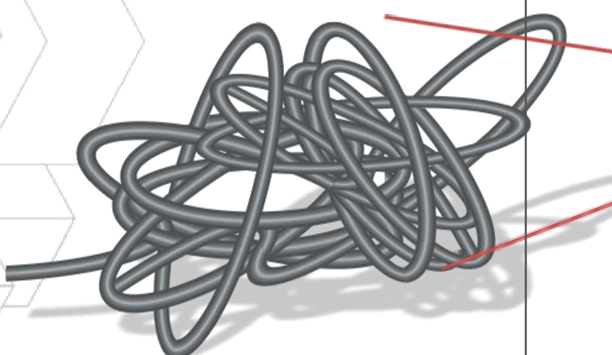
# «Вычислимость» за гранью  формальных ограничений:

**Данные :**

**1) «малые» - структура простая, длина вычисляется по формуле**




**2) «большие» –структура сложная**



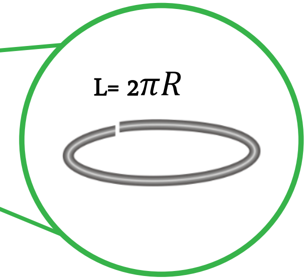
а длина нити конечная

**Математические знания –**
**формальные исчисления**

**Когнитивные функции -**
**понимание/распознавание**

**Вычислимые  функции –**

**Чему равна длинна нити ?**




**«распутывание» клубка**

???

**алгоритма нет**

**«вычисления» длины**

!!!

**алгоритм есть**

# Окружающая реальность - «большие» данные: множества множеств сложной структуры

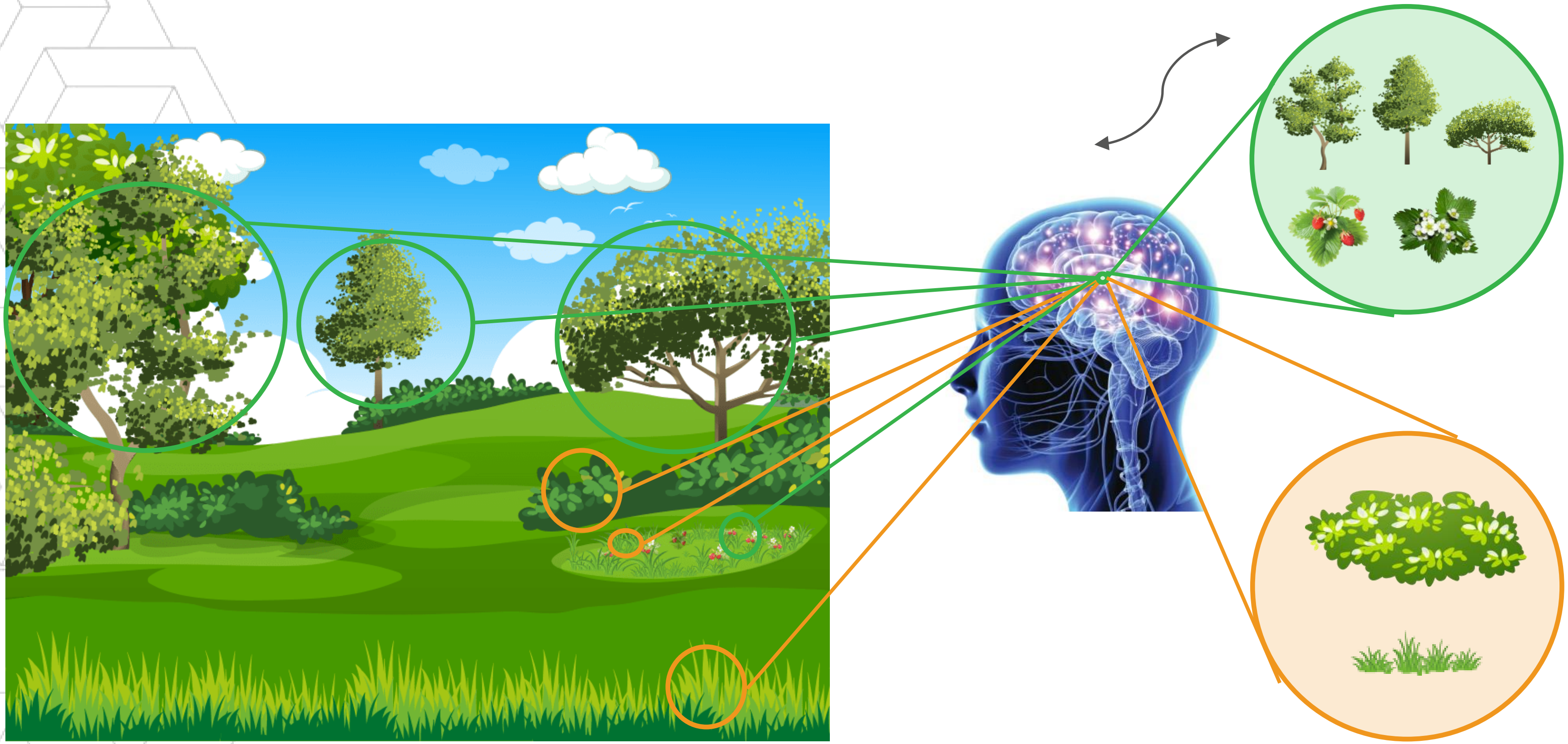
**Воспринимаемое многообразие физических данных $L^3T^1 \to D^4$**

**«длина х ширина х глубина х текущее время»**

**Многообразие когнитивных функций $L^3T^3 \to D^6$**

**«длина х ширина х глубина х прошлое х настоящее х будущее»**

# «Когнитивное» восприятие: вычислимая функция самосознания ?!



**Фундаментальный вопрос**: возможна ли формализация «пространства» - носителя когнитивных функций, позволяющая построить вычислимые и обратимые функции классификации (самосознания) ?

# … И СНОВА АВТО-РЕФЕРЕНЦИЯ: ПРОБЛЕМА «КОГНИТИВНОЙ ЗАМКНУТОСТИ» ПРОЦЕССОВ ВОСПРИЯТИЯ «СЕБЯ И МИРА»

- Проблема «когнитивной замкнутости» — это гипотеза о том, что человеческий разум конституционально неспособен решать определенные проблемы….
- Гипотеза следует расширенной трактовке теоремы Геделя о неполноте следует:
  - **«возможности разума (**системы когнитивного исчисления**) , способного** непротиворечиво **(единственным образом) объяснить (**смоделировать**) самого себя, являют** логическое противоречие**… что порождает** «неполноту», **из которой следует неспособность разума объяснить самого себя**
- Современная наука пока не может предложить объяснение воплощения «интеллекта» (информации) в его «носителе» (мозге), но в принципе объяснение … возможно.

## «ОБЪЯСНЕНИЕ»: КОНСТРУИРУЕМАЯ «ВСЕЛЕННАЯ» ГЕДЕЛЯ КАК МНОЖЕСТВО ВЫЧИСЛИМЫХ ФУНКЦИЙ - НОСИТЕЛЕЙ СМЫСЛОВ

- Вселенная Гёделя, обозначаемая L, — это особый класс множеств, который можно полностью описать с помощью более простых множеств , то есть

  L — объединение конструктивной иерархии подмножеств $L_{alfa}$.

- описана Куртом Гёделем в статье 1938 года «Согласованность аксиомы выбора и обобщенной гипотезы континуума».

- **Вывод:** аксиома выбора и обобщенная гипотеза континуума верны в конструируемой вселенной

# Подробности

Вселенную L можно рассматривать как «поэтапно» построенную частный вид «вселенной фон Неймана» V.

Все этапы L индексируются порядковыми номерами.

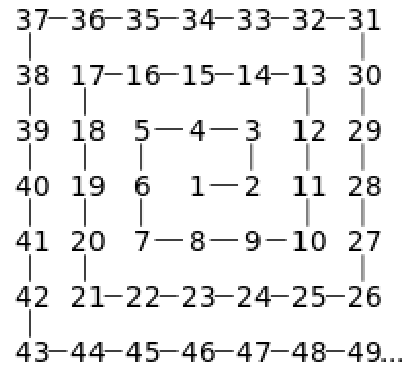
Отличие:

Во «вселенной фон Неймана» V на этапе α+1 имеем $V_{alpha +1}$ — это набор всех подмножеств предыдущего этапа $V_{alfa}$.

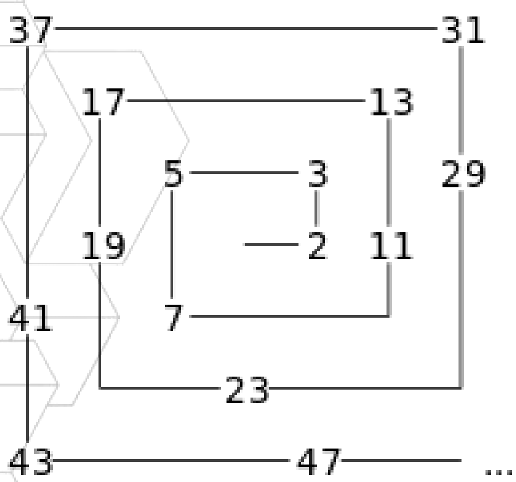
В конструктивной «вселенной Гёделя» L используются только те подмножества предыдущего этапа, которые: определяются формулой на формальном языке теории множеств с параметрами предыдущего этапа

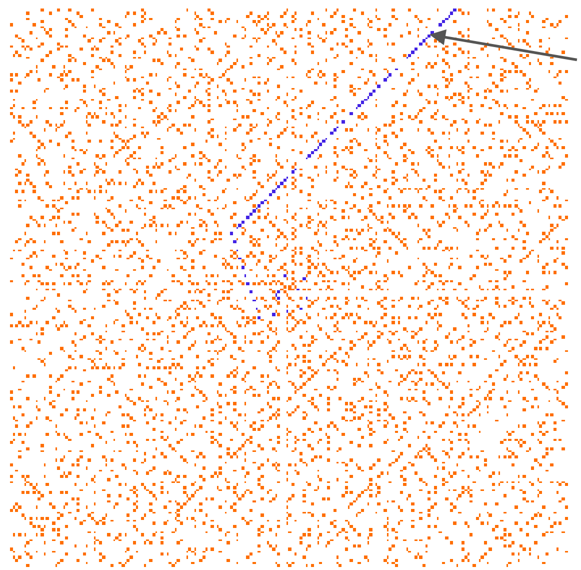
# Множества: понятия ординалы и кардиналы

- **порядковым числом**,
  или **ординалом** (лат. *ordinalis* — порядковый)
  называется порядковый тип вполне упорядоченного множества.




Спираль Улма



Многочлен Эйлера
$x^2$-x+41

# Кардинал множества и концепция бесконечности

- **кардиналом** в **теории множеств** называется объект, который характеризует мощность **множества.**
- обозначение мощности n (A). Конечные **множества** легко сравнивать по **мощности**. Если n (A) = n (B), то конечные **множества** A и B равномощны.

Например:

- **мощность множества** A= {1; 3; 5; 7} равна n (A)=4.
- **мощность множества** B = {-3; 13; 2; 4} равна n (B) = 4.

**Значит, множества** A и B равномощны.

- Мощность множества E={5,5,5,5,5} равна n(E)=1

Итак: концепция понятий бесконечности, нуля и единицы идеологически далека от идей. математического исчисления …но

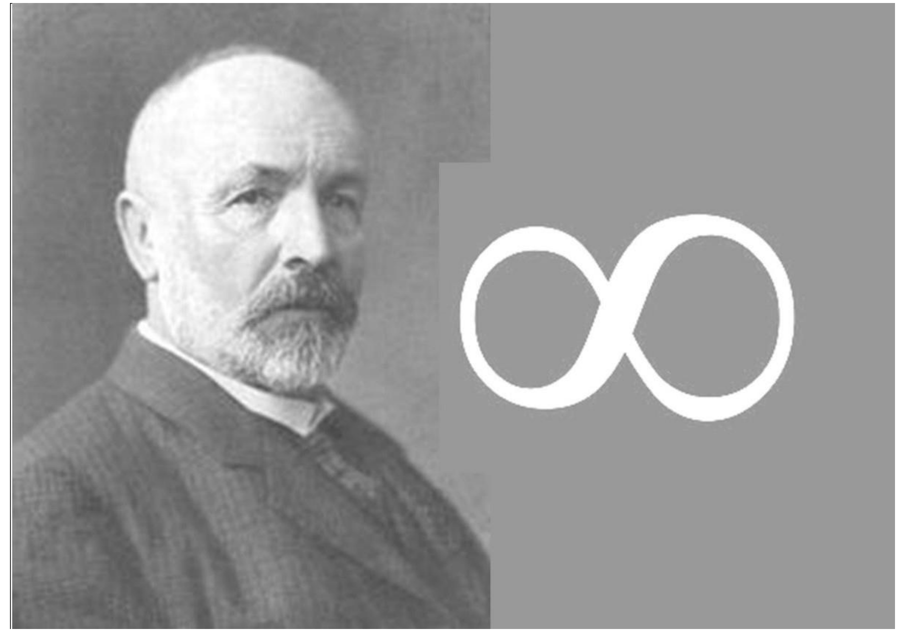
# Из этих понятий «берется вся математика»

**Георг Кантор** **(родился:**

- 1845 года, Санкт-Петербург, Россия, умер 1918, Германия)

В легендарной публикации *On a Property of the Collection of All Real Algebraic Numbers* доказал, что множество вещественных чисел «более многочисленно», чем множество алгебраических чисел.

Кантор впервые показал, что существуют бесконечные множества разных размеров




*«Множество — это большое количество, которое позволяет воспринимать себя как одно» — Георг Кантор*

**Сколько чисел есть между 0 и 1?**

- множество всех вещественных алгебраических чисел является *бесконечным счётным множеством*
- Транцендентные числа : **в *любом* замкнутом интервале [*a*,*b*] существует *хотя бы* одно транцендентное число, которое никогда нельзя будет подсчитать в бесконечном счётном множестве. Поскольку одно такое число существует, то в семействе вещественных чисел существует бесконечное количество транцендентных чисел**.

# Применение: от чего то надо «отказаться»: величины или смысла ?

- **Идея метаматематики**: «математики понятий, объясняют понятия». Например: если некоторое «событие» уже произошло (воплощено) , то с точки зрения «ситуации» оно принадлежит не «непрерывному бытию», но лишь «некоторому абстрактному «многообразию величин».
- Идею эту следует понимать буквально: онтология как исчисление оказывается состоятельной только лишь запрещая «смысл события».

$$\delta \in \gamma \Rightarrow \exists \beta : \beta \in \alpha \wedge f(\beta) = \delta.$$

$$f(\beta) \in \beta$$

# Принцип Ландауэра

- Математика как язык надо согласовать с физикой, как с «носителем» языка.
- Принцип гласит, что в любой вычислительной системе, независимо от её физической реализации, потеря 1 бита информации неизбежно сопровождается увеличением энтропии самой вычислительной системы или окружающей среды.
- В более узком понимании, принцип Ландауэра утверждает, что при стирании (уничтожении) 1 бита информации вычислительной системой потребляется теплота в количестве по крайней мере ***W*** джоулей: $\boldsymbol{W=k_B T\ln 2}$, где $\boldsymbol{k_B}$ — постоянная Больцмана, ***T*** — абсолютная температура изотермического процесса
- иными словами: стирание одного бита информации требует по меньшей мере $\boldsymbol{W=k_B T\ln 2}$ Джоулей энергии.

# Отношение «запись/стирание» информации

- запись и уничтожение одного бита информации не симметричны. Запись одного бита может требовать и меньшего количества энергии.
- Принцип Ландауэра иллюстрируется «молекулярным» тепловым двигателем, предложенным в 1929 году Лео Сциллардом, в котором в качестве рабочего тела используется одна свободная классическая частица, а нахождение частицы в определенной/неопределенной части рабочей камеры соответствует записи/уничтожению одного бита информации
- Для «минимальной тепловой машины» коэффициент полезного действия, в точности совпадающий с кпд макроскопической тепловой машины, тем самым иллюстрируя «отрицательный» смысл теоремы Карно: кпд цикла Карно *не зависит* от рабочего тела, использованного тепловым двигателем.

# Итого: Джон Арчибальд Уилер

- концептуальная позиция Д. А. Уилера, афористически сводящуюся к “it from bit”.
- Д. Уилер этим аргументирует идею , что все фундаментальные для естествознания явления и объекты, такие как частицы и поля, имеют информационную природу, хотя лучше бы он написал

  “it from qubit”.

# Итак:

- «любая физическая частица, сила или поле, и даже сам пространственно-временной континуум черпают свои смысл и существование (иногда опосредованно) в так или иначе оформленных (вычислимых) ответах «да» или «нет» на вопросы, поставленные наблюдателем (исследователем)…
- Поэтому « то, что мы понимаем под реальностью возникает из вопросов, адресуемых нами Природе, на которые возможны ответы «да» или «нет».
- Таким, образом основой любого мыслимого физического объекта служит информация
- принцип Ландауэра устанавливает связь между информацией и энергией, — базовыми представлениями физики, включая *максимальная скорость* выполнения вычислительных операций

# Заключение

- Некоторые вещи нам непонятны не потому, что понятия наши слабы, а потому что они не входят в круг наших понятий».

**Козьма Прутков**

- основное ограничение программ (на практике) и алгоритмов (в теории алгоритмов) состоит в самоприменимости:
  - насколько возможны программы, анализирующие и производящие «программы вообще».
- На самом деле эта проблема не только теории алгоритмов и, как следствие, программ.
- Она касается ограниченности и замкнутости любой формальной системы: **никакая формальная система не может содержать полное описание самой себя**. Более точно это сформулировано в теоремах Гёделя о неполноте:

## А именно:

- **Теорема 1**. В любой замкнутой формальной системе (теории) существует верная формула (утверждение), не доказуемая в этой теории.
- **Теорема 2**. Формула (утверждение), выражающая непротиворечивость теории, не может быть доказана в этой теории: то есть любая теория не может содержать непротиворечивое (полное) описание самой себя.