ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ИНСТИТУТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК И ТЕХНОЛОГИЙ

ВШ ИСКУСТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

курс: Введение в профессиональную деятельность

Тема 2. Математика как метафора (наблюдения vs моделирование)

Лекция 8 : теоретический минимум компьютерных наук (4): *методология «понять нельзя измерить» ???*

28.03.2024

Содержание

- О чем говорили и что обсуждали на прошлой лекции № 7
- Комментарии к практическим заданиям
- Введение к лекции № 8:
- Методология ««*понять нельзя измерить» ???*
- Основные идеи и базовые принципы
- Заключение

На лекции 7 обсуждали фундаментальные тезисы компьютерных наук и … их смыслы

- **Тезис Тьюринга**. Любой вербальный алгоритм в алфавите *M* может быть реализован некоторой «машиной Тьюринга», выполняющий операции над алфавитом *M.*
- **Тезис Маркова – принцип нормализации.** Любой вербальный алгоритм в алфавите *M* может быть реализован некоторым нормальным (исходные данные и результат работы **алгоритма** являются словами в этом алфавите) алгорифмом над алфавитом *M.*
- **Тезис Черча-Тьюринга**. Всякая интуитивно (???) вычислимая функция является вычислимой по Тьюрингу.

Теорема . Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ частично рекурсивна тогда и только тогда, когда она вычислима по Тьюрингу.

Обсудили исчисления для компьютерных вычислений

Если человек не понимает проблемы,
он пишет много формул
Н. Бор

- Суть компьютерных исчислений: описать правила составления программ над решениями математических (алгебраических чисел) уравнений так, чтобы отобразить их на конечное множество компьютерных чисел.
- Аргументы Геделя о возможности такой замены: заменить формальные доказательств теорем на вычислимость их характеристических функций
  - получить решение эквивалентно тому, чтобы наблюдать этот результат экспериментально (подход Гейзенберга)
- Идея «вычисления вместо наблюдения»: где поставить запятую в предложении: «понять нельзя вычислить» ?

когда объяснения «словами» могут заменить формулы,

когда «объяснения» – суть «доказательства» {1,0}?

(автореферентные «объяснения» как тавтологии)

Введение: компьютерная концепция:
числа-смыслы и смыслы-количества

Математика – это искусство давать разным вещам одно название
А. Пуанкаре

- Множество целых чисел счетно-бесконечно (разрешимость множеств)
- Множество действительных чисел континуально-бесконечно
- Сколько доказательств имеет «интуитивно-верное» высказывание
- Сколько бы бит мы не использовали для кодирования числа, неизбежно столкнемся с понятиями-объектами, которые не имеют точного числового представления.
  - Числа с плавающей запятой — является компромиссом между **точностью и смыслом кодируемых** значений.
  - Суть понятия бесконечности. «бесконечность" плюс один – всё равно будет бесконечность». Вещь изменилась, но смысл остался

Методология «компьютерных» доказательств

- Так, в теореме Гёделя изучается не конкретная формула А(р), которая м.б. неразрешима (противоречива), а доказывается посылка:
  - **если исчисление (система) непротиворечиво, то формула А(р) неразрешима**.
- Фактически речь идет лишьо доказательстве истинности логической импликации, а именно:

«если система непротиворечива, то формула неразрешима».

Можно экспериментально наблюдать «характеристическую функцию» ?

(ЧИСЛА-КОЛИЧЕСТВО И ЧИСЛА СМЫСЛЫ)

«**предложения**»-формулы, которые надо доказать

наблюдаемые объекты мира

Математическое абстрагирование

математические понятия и **операции**

13,
a/b
$x^2 + y^2 = c^2$

Операции исчисления

$$\begin{pmatrix} A^T = A \\ A * A = A \end{pmatrix}$$

унарные
$n = 1$

$$\begin{pmatrix} (A * B) * C = A * (B * C) \\ A * E = E * A = A \\ A^{-1} * A = A * A^{-1} = E \end{pmatrix}$$

бинарные
$n = 2$

...

$$\big((A, B, C) = (A * [B * C])\big)$$

n - арные
$n > 2$

Когнитивные функции как предложения, которые надо объяснить

Дерево, Авто, Дом
треугольник,
функция

множества

$\left(\underset{\text{числа}}{A}, \underset{\text{функции}}{Q}, \ldots, \underset{\text{векторы}}{Z} \right)$

Математические формулы

- либо «истины»,
- либо «ложны»

Вербальные предложения

- либо имею
- либо не имеют

«смысл»

Стая легких времирей!
Ты поюнна и вабна,
Душу ты пьянишь, как струны,
В сердце входишь, как волна!

sin2+cos2=1
1+2=3

<u>1+1=10 ? ? ?</u>

Абстракция понятия «смысл»:

Бифуркация множества абстракций : счетное vs континуальное ?

«счетная» концепция Геделя:

- Множество объектов реальности образуют счетное множество моделей
- Всем моделям, которые имеют смысл, можно сопоставить два множества: счетное /мыслимое и континуальное /возможное

Теорема (смысловая трактовка) : континуальное множество смыслов не разрешимо

А: мыслимое множество символов можно перечислить (перенумеровать) …..
Б: Конечное множество мыслимых символов разрешимо
В: характеристические функции множества мыслимых смыслов вычислимы
(вопрос: какова сложность вычислений таких функций?)

Мыслимые множества образуют исчисление – нумерацию Геделя

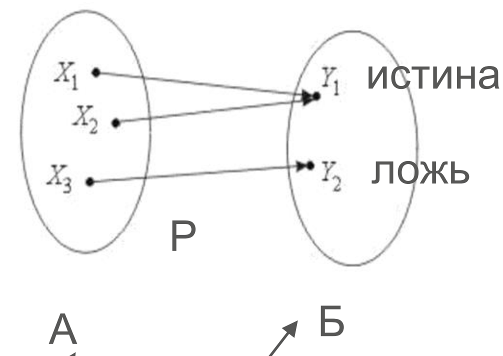
ИМЕЕТ ЛИ ПОНЯТИЕ «СМЫСЛ» НЕКОТОРУЮ «ТОЧНОСТЬ» ?

- Проблема: точности (разрядность) числа vs точности смысла
- Каждому высказыванию, формуле или программе на языке программирования всегда можно поставить в некоторое число и …. наоборот.
- Например, так:
  - фраза на русском языке: «два плюс два равно четыре» использует k различных символов. Мы можем сопоставить каждому используемому символу некоторую **цифру в k-ичной системе счисления.**
  - Поскольку программа — это последовательность символов, следовательно её можно считать записью некоторого числа в k-ичной системе счисления.

«объем понятий» – «разрядность числа»

Итак: исчисление это «язык, алфавит, грамматика и правила вывода»

Суръекция



Если есть текст Т, состоящий из строк символов алфавита А, то:

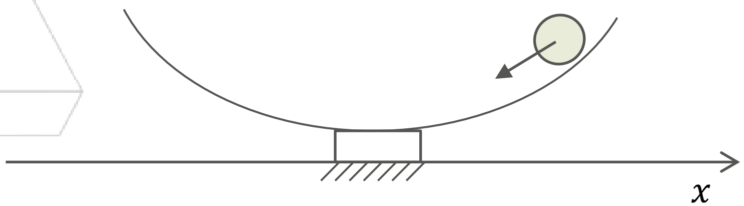
- из Т можно выделить подмножество так называемых **высказываний** **В** — грамматически правильных текстов, которые являются входными данными **алгоритма** (функции) **Р**, сопоставляющей всем элементам **В** одно из двух значений: ИСТИНА или ЛОЖЬ

«алгоритм» есть последовательность операций («программа»), которая *за конечное число шагов* переводит входные данные в результат => булеву переменную.

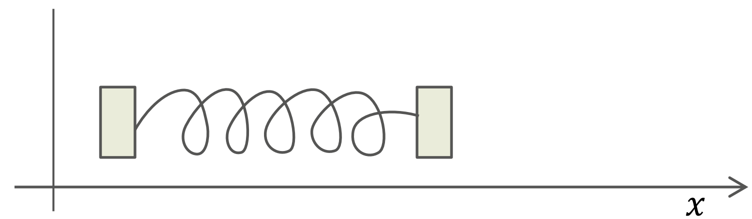
Возможно ли понимание «смысла» через моделирование

Обманите меня … но совсем, навсегда
Чтоб не думать зачем, чтоб не помнить когда
Чтоб поверить обману свободно без дум
Чтоб за кем-то идти наобум

Максимилиан Волошин



а)



б)

Физические процессы в разных объектах описываются одинаковыми уравнениями дифференциального исчисления.
Общность описания в том, что кинетическая T и потенциальная V энергия для этих процессов **имеет одно и то же выражение**

$T = 1/2mv^2, V = 1/2kx^2$. ax'' +bx'+cx=d (дифференциальное уравнение второго порядка, где x(t) – решение x(t)=f(a, b, c, d; x_0), x_0 – начальные условия

v – скорость изменения координаты или производная $x'(t)$

«АЛГЕБРА» НЕНАБЛЮДАЕМЫХ «ПРИЧИН-СМЫСЛОВ»

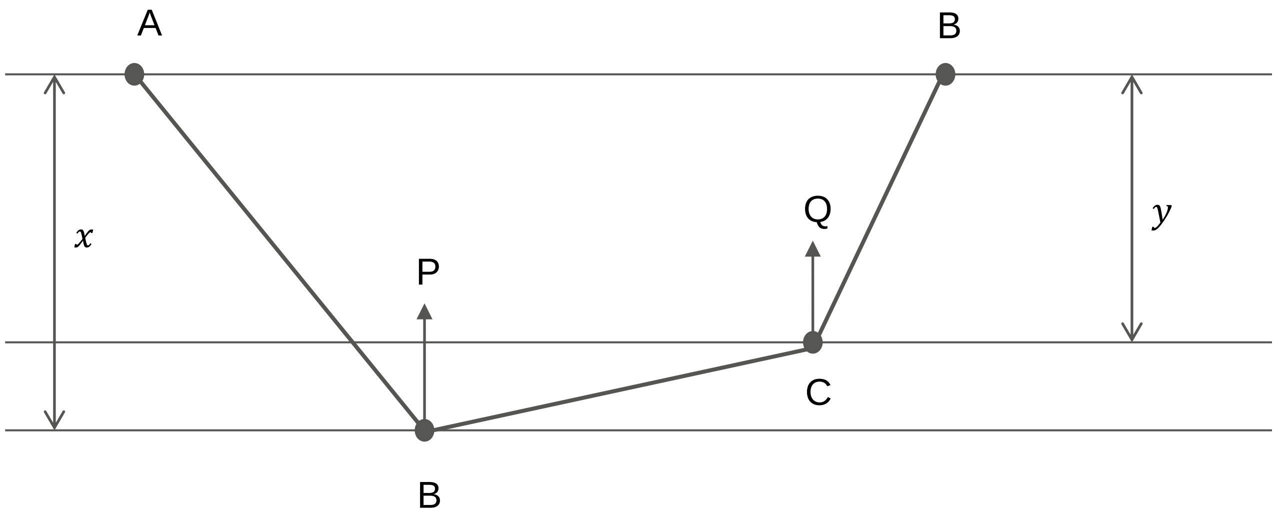


Рис 1. Колебания струны

P стремится уменьшить x
Q стремится уменьшить y

$$\begin{cases} P = 2x - y \\ Q = -x + 2y \end{cases}$$

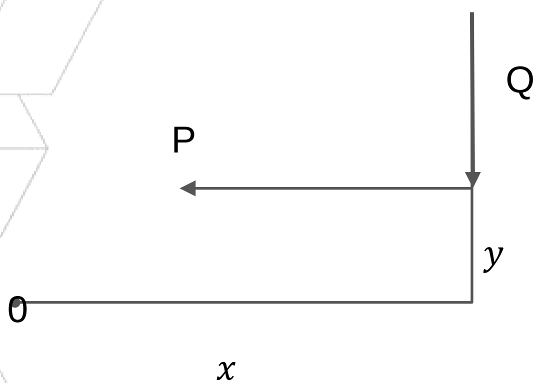
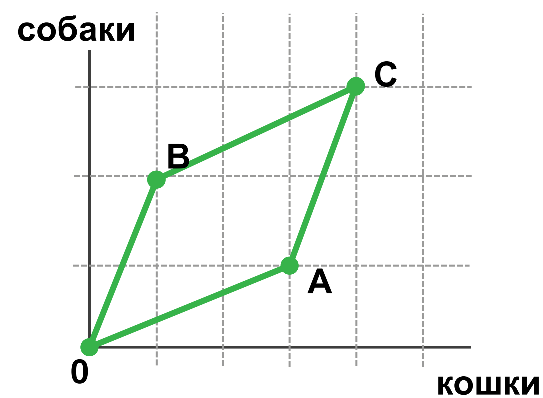


Рис 2. Частица в резервуаре

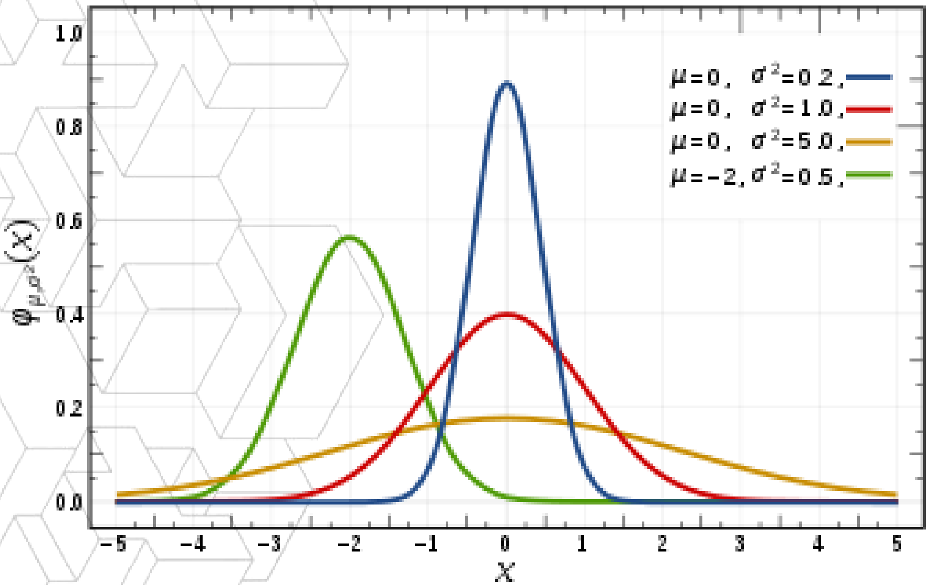
Положение струны S задается на плоскости **точкой с координатами S(x,y)**



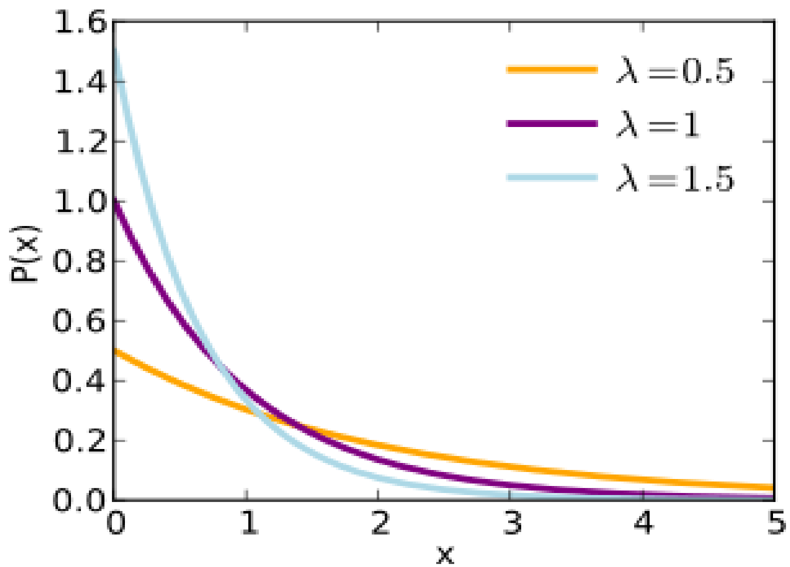
Исчисление в природе: вероятность vs точный расчет

истина (языка системы) должна быть
<u>неопределимой</u> в самой системе
А. Тарский

Пример:
расчет потенциальных возможностей – (прогноз погоды), основан на вычислении «вероятности» возможных событий. Все, что «потенциально возможно» произойдет с **вероятностью** 1.



Плотность распределения вероятностей по закону Гаусса



Плотность распределение вероятностей по закону Пуассона

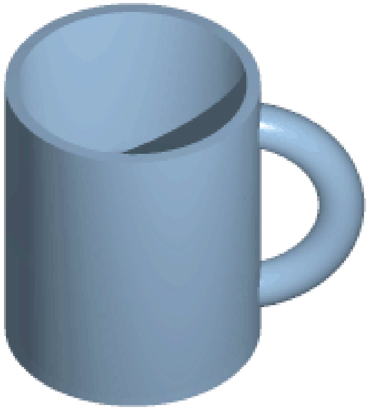
Формализма теории чисел к вычислению понятий :

Итак, каждая формальная теория является цепочкой высказываний, которые выводятся друг из друга согласно правилам логики, принимая значения **«истина или ложь»**.

2-арная логика (истина, ложь) это лишь одна из возможных видов логических исчислений, а **причина за которой скрывается удивительная эффективность математики» есть следствие постоянства законов Природы**

Чудесная загадка соответствия математического языка законам физики является удивительным даром, который мы не в состоянии понять и которого мы, возможно, недостойны.

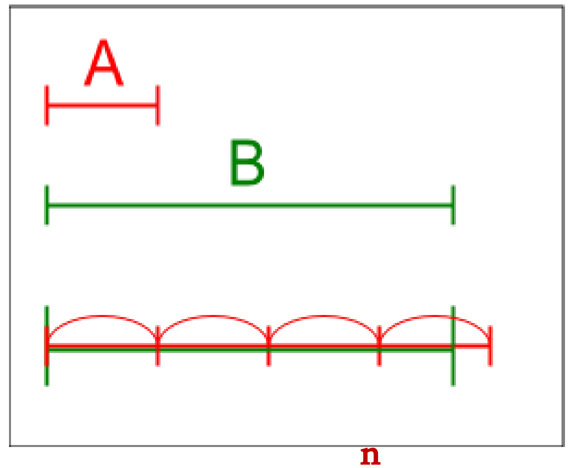
Ю. Вигнер



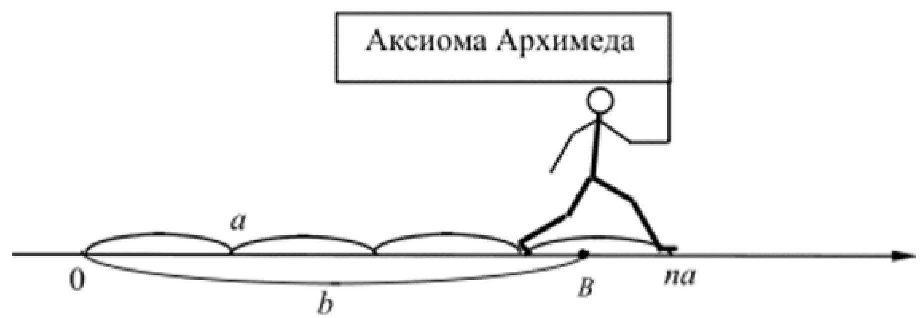
ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ СВОЙСТВО НАБЛЮДАЕМОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛЬНОСТИ: СЧЕТНАЯ «АДДИТИВНОСТЬ»

Следствие «аксиомы Архимеда»: суть - отсутствии в Природе бесконечно малых величин, т.е. для любых двух элементов A, B >0 существует целое число n такое, что n*A>B, n>1,

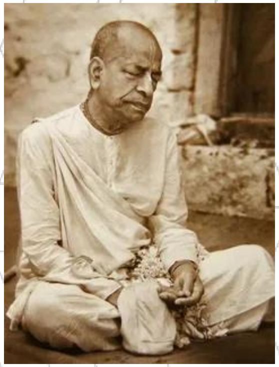
однако n*0=0 ???



аксиома Архимеда утверждает следующее:
В Природе существует бесконечно малых и бесконечно больших величин.
Если математическая структуры удовлетворяет аксиоме Архимеда , то такая структура называется архимедовой.
Пример: «архимедовой структуры» - множество вещественных чисел, наделенная структурой «порядка» : "<", ">"



Информационная VS интуитивная, физическая модели реальности



Тень бесплотна и лишена подлинности, но интуиция по тени может судить о свойствах реальности.

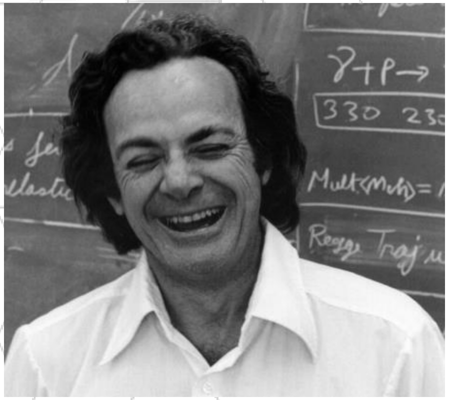
Ш. Прабхупады

(1896 -1977)

Под интуицией я подразумеваю не зыбкое свидетельство чувств и не обманчивое суждение воображения, а понимание ясного и внимательного ума, настолько отчетливое, что не остается совершенно никакого сомнения относительно того, что мы разумеем.

Р. Декарт

(1596 – 1650)



Под пониманием я подразумеваю формирование физической картины явления, которая интуитивно кажется совершенно ясной

Р. Фейнман

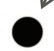
(1918-1988)

Противоречия в основах современной математики (аксиома выбора)

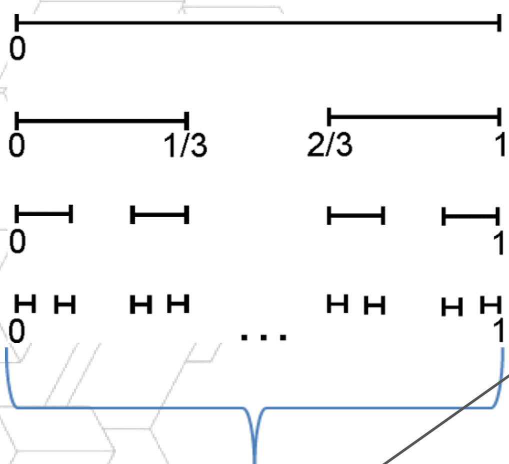
Счетная аддитивность

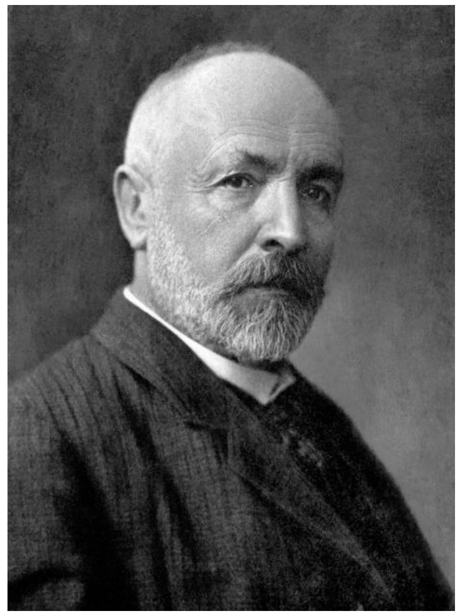
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

Можно ли из нульмерных объектов (точек)„ построить не нульмерный протяженный объект, например отрезок ?

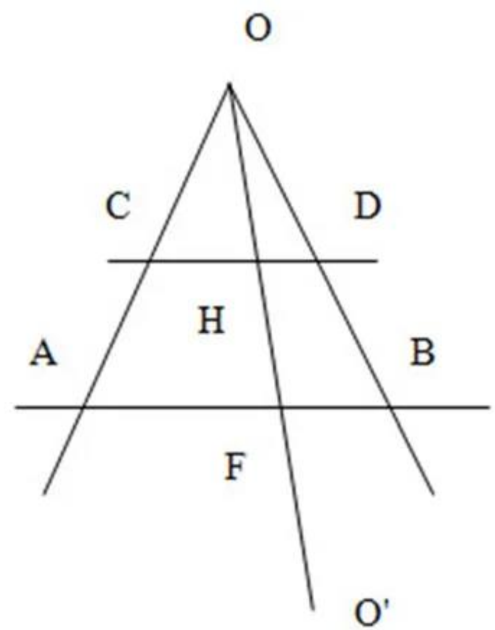


Точка – множество меры ноль





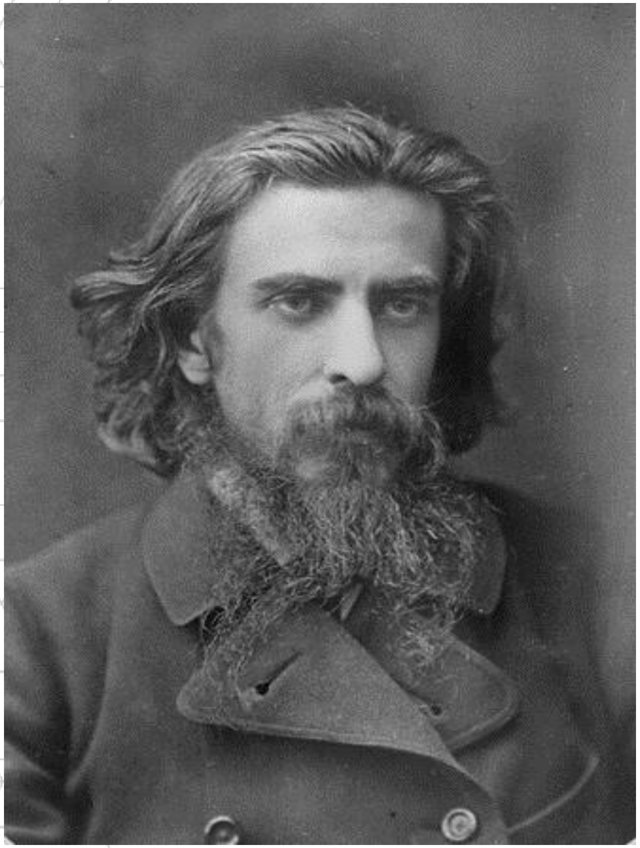
Г. Кантор



Сколько точек
В отрезках на AF и CH?

Канторово множество счётное объединение объектов меры 0

Числа как «тени» реальности



«Милый друг, иль ты не видишь, что всё видимое нами –
Только отблеск, только тени от незримого очами»

В.С. Соловьёв (1853 - 1900)
академик Императорской Академии наук по разряду изящной словесности

Можем ли мы «увидить»
- собственные числа матрицы
- корни квадратного уравнения
- температуру 36.6

Самореференция: ИНФОРМАЦИЯ из ИНФОРМАЦИИ

IT FROM BIT

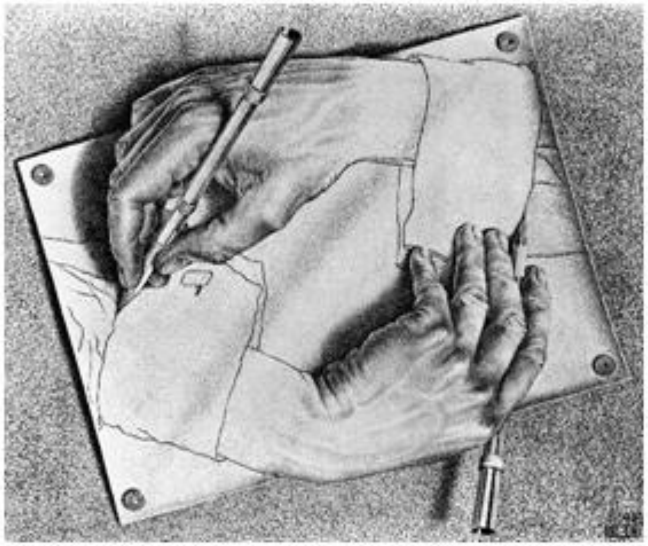
Последовательности бывают разные

- **числа-числа**

vs

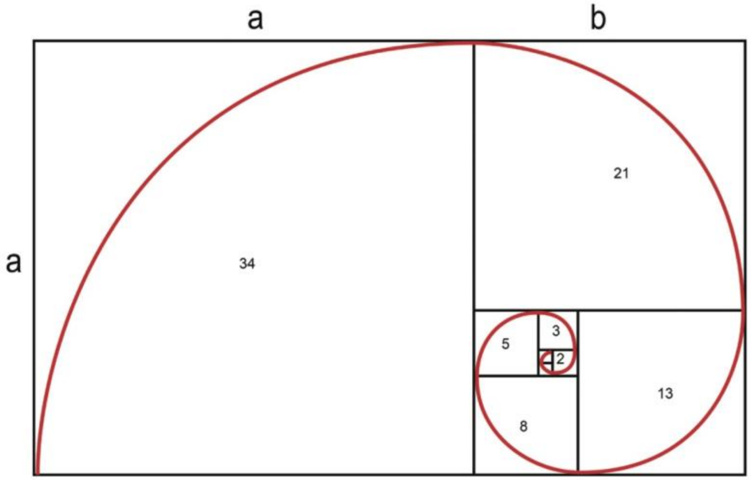
- **рисунок-рисунок**

Картина Эшера рисующие руки



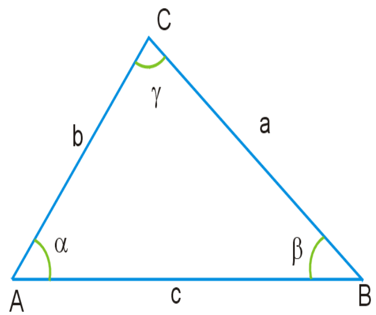
Пример взаимного сосоздания и циркулярной причинности.
Метафора странной петли Хофштаттера

Пример: числа Фибоначчи самореферентны- определяются суммированием двух предыдущих членов ряда но… начальные значения должны быть заданы



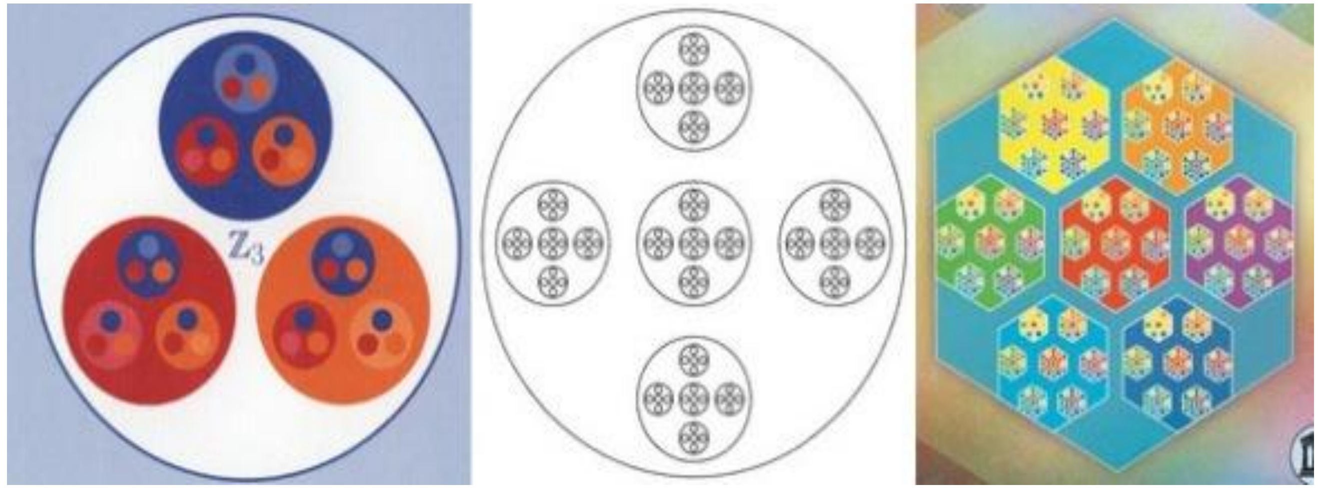
Механизм самореференции (индуцированное) свойство возникающее в сложных системах с strange loop **циклической структурой, которая проходит через несколько уровней иерархии системы и попадает в исходную точку**

Фракталы или неархимедовы ультраметрические пространства



d(x,z)<=d(x,y)+d(y,z)

«классическое» неравенство треугольника



Пример: ультраметрические пространства: многообразие бесконечно вложенных друг в друга объектов

В ультраметрическом пространстве у треугольника не бывает самой длинной стороны;
(все треугольники равнобедренные)

«ультраметрическое» неравенство треугольника:

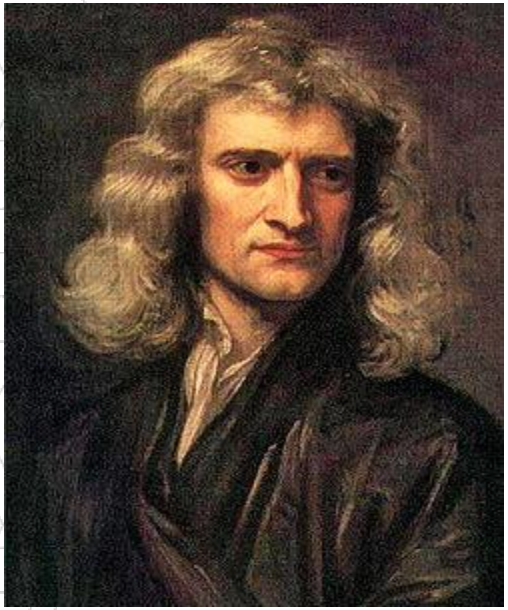
$$d(x,z) \leqslant \max(d(x,y), d(y,z))$$

Пример: в квантовой механики, невозможно измерить расстояния, меньшие «планковской длины» (неравенство Гейзенберга), что нарушает аксиому Архимеда…… пространство на этом масштабе «ультраметрическое» ???

ЧТО ЖЕ ТАКОЕ ЧИСЛО ?

«Под числом я подразумеваю не столько набор единиц, сколько абстрактное отношение некоторой величины к другой величине того же вида, которую мы принимаем за единицу».

(By a number I do not mean so much a set of units as an abstract ratio of some quantity to another quantity of the same kind, which we take as a unit)



И. Ньютон
(1643 – 1727)

Проблема объективизации

- **понятий и**
- **числовых отношений**

ЧИСЛА В «КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУКАХ»

1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1

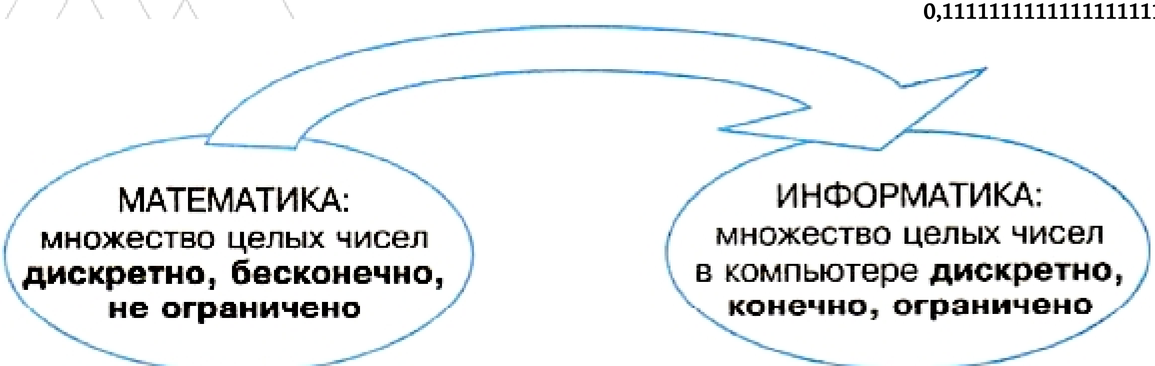
Образ компьютерной памяти

где же здесь число +13

0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Знак и порядок								Знак и мантисса																							

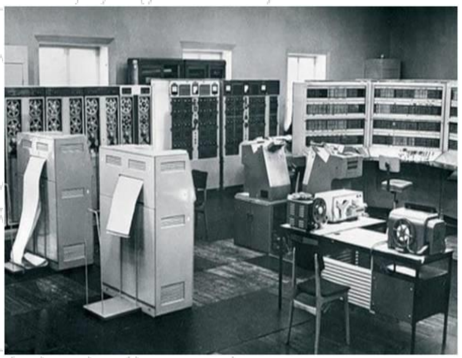
$0{,}11111111111111111111111 \bullet 10^{1111111}$

$1111111_2 = 127_{10}$,



Заключение: современный компьютер - «цифровой паровоз»:

Суть диссипативной природы «классических» вычислительных процессов: Вентили «И-НЕ», принимая на вход два бита, выдают результат размером всего **один бит**.



Вычисления не обратимы, По полученному результату, нельзя однозначно восстановить значения двух исходных аргументов, поэтому

- каждая логическая операция (вычисление) вентиля «И-НЕ» уменьшает информационную энтропию системы (на 1.189 бита), и рассеивает не менее ~0.02 эВ тепла.
- Современный цифровой компьютер, вычисляя числа одновременно нагревает окружающее пространство