ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

ИНСТИТУТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК И ТЕХНОЛОГИЙ

ВШ ИСКУСТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

курс: Введение в профессиональную деятельность

Тема 2. Математика как метафора (явления vs представления)

Лекция 7 : теоретический минимум компьютерных наук (3) -: *понять vs вычислить*

«Проблема остановки для машин Тьюринга алгоритмически неразрешима»

14.03.2024

Содержание

- О чем говорили и что обсуждали на прошлой лекции № 6
- Комментарии к заданию1 (как научиться видеть причины фактов)
- Введение к лекции № 7: «объяснить vs доказать» -
- Основные идеи и базовые принципы теоремы Геделя
- Методологические аспекты и проблемы использования КН.
  - вычислимость функций
  - перечислимость и разрешимость множеств….
- Заключение

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ (ВОПРОС «ГДЕ») МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКТОВ

объекты физической реальности + силы → математические объекты (символы) + операции над **абстрактными объектами** → **алгебра** n-символов + словарь терминов → наблюдение **математических фактов** и их валидация

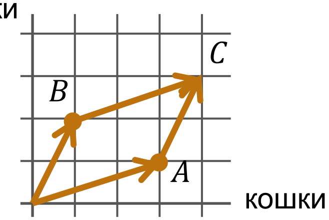
Примеры

1) A = 3 кошки и 1 собака

B = 1 кошка и 2 собаки

C = 4 кошки и 3 собаки

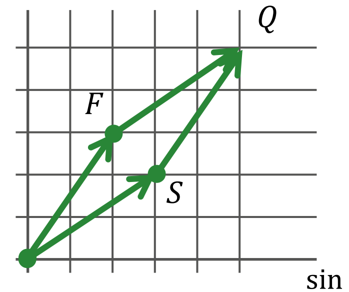
$$C = A + B$$



2) $F = 2\sin t + 3\cos t$

$S = 3\sin t + 2\cos t$

$$Q = F + S$$

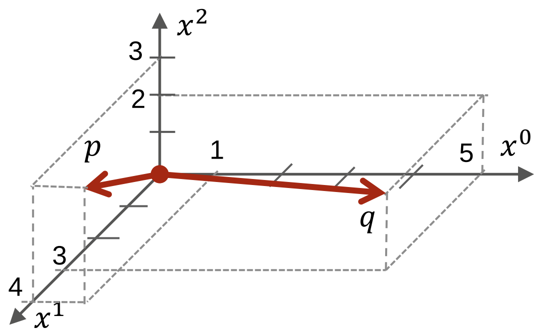


3) $q = 2x^2 + 3x + 5x^0$

$+$

$p = 3x^2 + 4x + 1x^0$

$$5x^2 + 7x + 6x^0$$



4) $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots$

<u>наблюдение факта: сложение векторов</u>

в R^2

в R^3

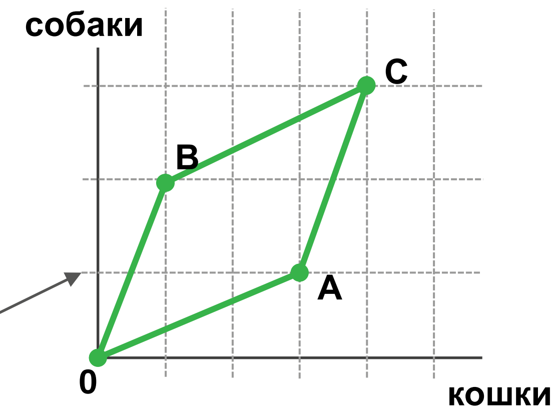
в R^∞

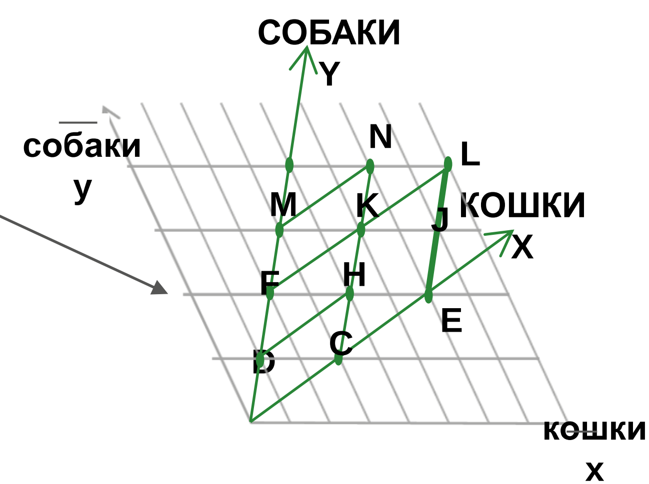
МОЖНО ЛИ НАБЛЮДАТЬ НЕ ФАКТЫ, А ПОНЯТЬ ПРИЧИНЫ ?

Наблюдаемые явления есть следствие причин, которые следуют за законам Природы. Действия этих законов можно исследовать опытным путем, а также не только «наблюдать» , но «объяснять» – однако это требует перехода к использованию «абстракций».

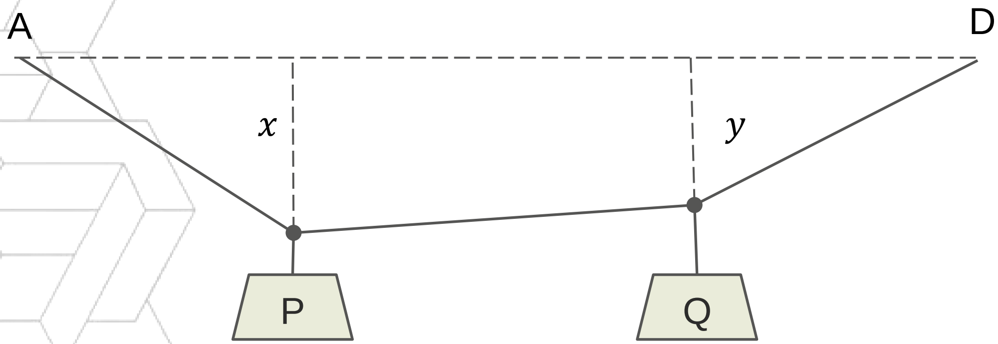
Пример 1 алгебра «кошек и собак» - экспериментальный факт, но ему можно сопоставить ряд абстракций (понятий) и операций над ними

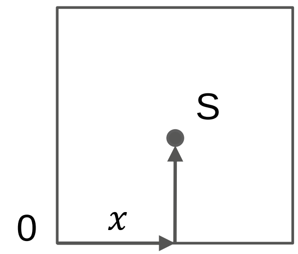
- векторную модель : системы координат + числа : **натуральные**, простые, целые, рациональные (вес, рост) + операции сложение, умножение ….
- функции : непрерывные (расстояние), дискретные (число ног) , случайные , **вычислимые**



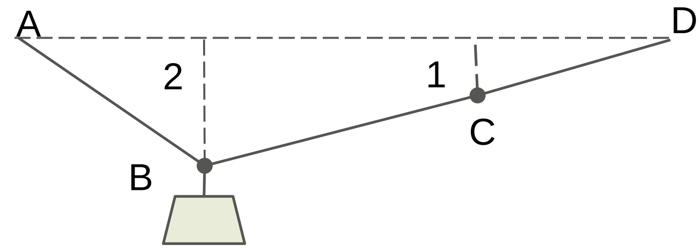


Пример 2: струна S с двумя грузами





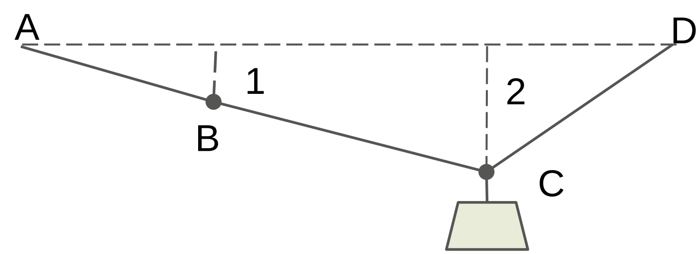
Положение струны S задается на плоскости **точкой с координатами S(x,y)**

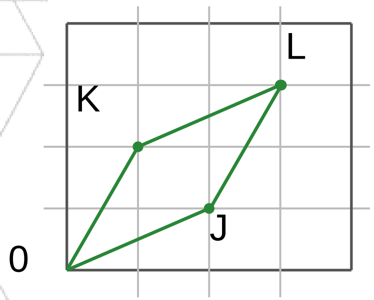


положения	P	Q	x	y
J	1	0	2	1
K	0	1	1	2
L	1	1	3	3

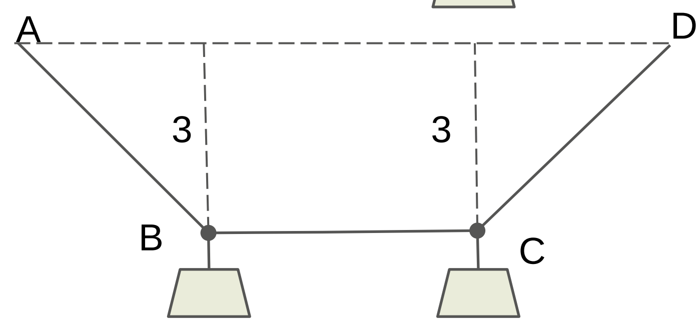
операция

L=J+K





Что будет в ситуации L=5J+3K - ?



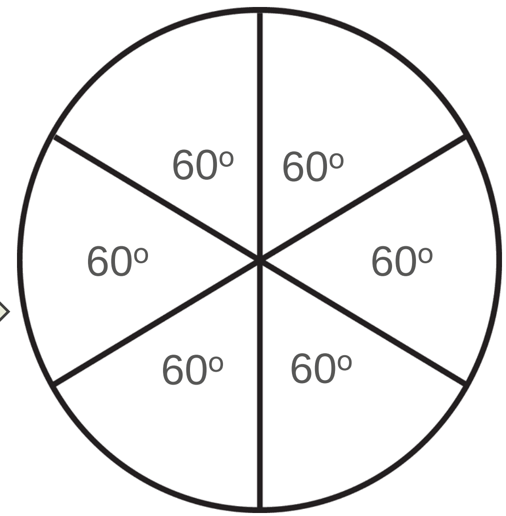
ПРИМЕР 3:

- Известно, что Земля вращается вокруг своей оси чуть более, чем 365 раз в год. Шумеры считали, что каждый день Солнце проходит примерно 1/360 пути по эклиптике (видимое с Земли годичное движение Солнца относительно звёзд).

- Жители Вавилона пользовались календарём, в котором было 360 дней + шестидесятеричная позиционная система счисления (60 символов) в противовес современной десятичной (10 символов)

  каждый из углов равностороннего треугольника равняется **60 градусам**, поэтому 6 таких треугольников вместе дают фигуру – который будет иметь 6*60=360 градусов

  наблюдение



  – Можем ли мы наблюдать **«математические факты»**, что в 1 часе 60 минут
  – в 1 минуте 60 секунд…
  – в 1 миллисекунде 1/1000 сек
  – в 1 миллисекунде 1 000 000 наносекунд
  – 1 000 микросекунд = 0,001 секунды= 0,00002 минуты

На лекции 6 мы обсуждали роль «абстракции неразличимости»

В. Кандинский, 1910 «Без названия»

Истина относительна или … !?

….при рассмотрении множества объектов необходимо выделять подмножества эквивалентности по отношению к тем их свойствам, которые в контексте текущей ситуации оказываются инвариантными к выбранным операциям преобразования

(Марков А.А., Теория алгорифмов., 1954)

Само по себе наличие математического аппарата никак не придает **точности и достоверности** научному исследованию. С помощью математического аппарата исследуется **не само явление, а его математическая модель**, которая может быть как удачной, так и неудачной …не объясняющей природу исследуемого явления.

Е. С. Вентцель (**И. Грекова**)
математик, теоретик артиллерии

Введение : *ВЫЧИСЛИТЬ VS ПОНЯТЬ* - ПРОБЛЕМА «ДОКАЗАТЬ VS ОБЪЯСНИТЬ»

Уточним понятия: доказать – «кому»; объяснить – «что», введя **абстракцию «высказывание»**

– **доказательство** представляет собой высказывание, имеющее целью доказать истинность или ложность некоторого утверждения (формулы), представленного («реифицированного») в форме текста некоторого языка (отвечает на вопрос «почему?»).

– **объяснение** не нуждается в доказательстве истинности или ложности, так как текст утверждения-объяснения по определению является «истинным» (синоним выражения: …»дело в том, что» …. аналог того, что не надо доказывать - понятие «аксиома»)

Фундаментальный вопрос:

Можно ли «объяснения» быть принято за «доказательства» ?

– Процессуальная доктрина исходит из того, что **объяснения** стороны допустимы **в качестве личных доказательств** и не допустимы в качестве доказательств объяснения юридических лиц, адвокатов, прокуроров….

(«личные» доказательства характеризуют суть феномена само (авто) референтности - **самоотнесения** субъективного сопоставления внешнего мира с внутренними аналогами (моделями) см. выше ссылка на И. Грекова). Суть феномена: мозг обрабатывает информацию о себе иначе, чем о чем-либо другом… «внешнем:

Используется новая абстракция – «внешний мир» - среда

– Доктрина же компьютерных наук на вопрос вопрос - "а как докажешь» отвечает: с помощью алгоритмов, вычислимых рекурсивных функций, разрешимых и перечислимых множеств используемых в **исчислении абстракций…..**

Вопрос: что есть «внешний мир» для исчислимых абстракций ?

(например это «числовое поле» или множество «своих» операций над «своими» абстракциями-числами. Свои значит операции «оставляют» исчисленные абстракции в этом же множестве – это и есть формальный аналог «референтности»)

Уточним понятия: алгоритм, вычислимые функции, разрешимые и перечислимые множества

- Слово «алгоритм» содержит в своем составе преобразованное географическое название, а именно слово Хорезм.
- Сам термин «алгоритм» обязан своим происхождением ученому средневекового Востока —Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми (жил приблизительно с 783 по 850 гг.)
- Слово «алгоритм» использовалось сначала для обозначения десятичной позиционной арифметики и правил цифровых вычислений, имеющих дело с символами (до того считали на счетной доске —абак, теперь на цифровых компьютерах, которые оперируют

к-ичными символами «0» и «1», к=2)

Идея Геделя: программу вычислений считать особой формой записи некоторого числа

- Каждому числу в к-ичной системе поставить в соответствие программу на каком либо языке, которая описывает функцию, **вычисляющую это число**.
- Такое соответствие сопоставляет с любой содержательной программе конкретное число, принадлежащее некоторому «числовому полю» - это «поле», в котором работает т.н. нумерация Геделя, есть подмножество N
- Понятно, что большинству чисел из N соответствуют бессмысленные (не отвечающие грамматике используемого языка) программы, которые не будут «правильно» работать, так как текст программы нее отвечает синтаксическим правилам языка программирования.
- Тогда, будем считать, что такие программы вычисляют **нигде не определенные функции**. Что для нас принципиально — это то, что каждой «правильной» программе соответствует некоторое уникальное число.

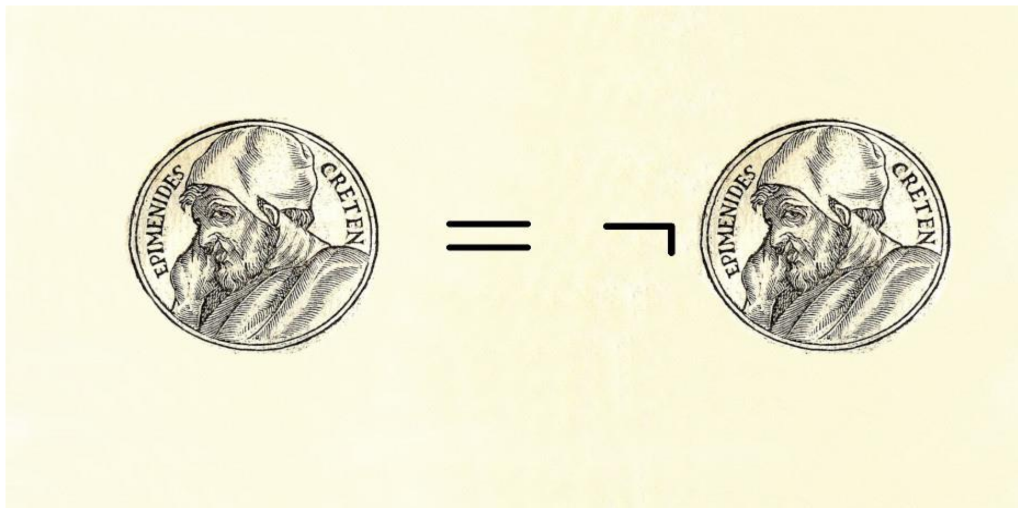
«Числовая» аргументация Геделя

- Каждому высказыванию или каждой программе на языке программирования всегда можно поставить в некоторое число и …. наоборот.

- Например, так.
  - Предположим, язык программирования (или описание алгоритма вычисления – фраза на русском языке: «два плюс два равно четыре» использует k различных символов. Мы можем сопоставить каждому такому символу **цифру в k-ичной системе счисления**.
  - Поскольку программа — это последовательность символов, её можно считать записью некоторого числа в k-ичной системе счисления.

Рекурсия «формального исчисления» как аргумент теорем Геделя

В неформальном объяснении о теорем Гёделя о неполноте говорят так: ***«теорема доказывает, что есть вещи, непостижимые для человеческого разума».*** Более строго можно сказать так: теорема утверждает, что в достаточно сложных языках существуют истинные, но **недоказуемые** высказывания. Еще строже: если высказывания построены с использованием рекурсивных функций, то…



Важно при объяснеии не перепутать формально **доказанное** с тем, что «**и так понятно**» на основе интуиции. Например, всякое число равно самому себе – понятно и так, но это аксиома арифметики. Чтобы все окончательно формализовать введем еще одну абстракцию «формальное **исчисление**»

Понятие «ФОРМАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

- Формальное исчисление суть ЯЗЫК (алфавит и грамматика), в котором определены правила построения утверждений/теорем, формул/высказываний, набор аксиом и множество правил логического вывода.

- Каждое предложение ЯЗЫКА **/теорема /высказывание** содержит цепочку формул (высказываний) $\mathbf{A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow T}$, **истинность** которых может быть доказана на основе ранее установленных теорем, утверждений или аксиом

- В «правильно» построенном (то есть разрешимом) формальном исчислении существует алгоритм, который для каждого высказывания **T** за конечное время выдаёт ответ:
  - «да» - это предложение выводимо (истинно) в рамках исчисления
  - «нет» — это предложение выводимо (ложно).

Теперь можно считать, что алгоритм — это программа, написанная на некотором языке программирования, которая на вход принимает некоторое предложение (высказывание или формулу) и выдает результат из двух значений: «истина» (предложение выводимо) или «ложь» (предложение не выводимо)

Итак, все дело в языке:

алфавите, грамматике и алгоритмах вывода

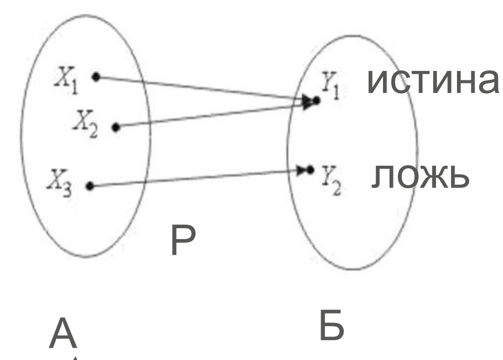
Если есть множество Т – текст, состоящий из строк символов алфавита А, то:

- из Т можно выделить подмножество так называемых **<u>высказываний</u>** **В** — грамматически правильных текстов, которые являются входными данными **<u>алгоритма</u>** (функции) **Р**, сопоставляющей всем элементам **В** одно из двух значений: ИСТИНА или ЛОЖЬ

(это функция отображает множество А в булево множество Б, состоящее только из двух элементов-значений).

ps заметим, предложение «***а ну, давай быстрей!»*** **-** не истинно и не ложно, поэтому <u>высказыванием</u> с рассматриваемой точки зрения не является

Сурьекция



Итак: <u>«алгоритм»</u> как последовательность инструкций («программу»), которая *за конечное число шагов* переводит входные данные в результат => булеву переменную.

Методологический комментарий: **вычислимость**

- Неформально вычислимость - это **способность эффективно решать некоторую проблему с помощью алгоритмов, вычисляющих числа**.
- Вычислимость связана с существованием алгоритма вычисления, имеющий номер из «нумерации Геделя».
- В настоящее время изучены модели вычислимости по Тьюрингу и μ-рекурсивные функции, а также лямбда-исчисление
- Однако, для функций с действительными аргументами и значениями понятие вычислимости требует до определения

Определение

- Функция $f : N \to N$ называется вычислимой, если существует алгоритм P, который на любом входе $n \in N$ выдает $f(n)$.
- под записью $f : A \to B$ мы будем понимать т.н. частичные функции, **то есть** на некоторых аргументах $n \in A$ функция $f(n)$ может быть не определена. Для тех аргументов $n \in N$, для которых $f(n)$ не определено, алгоритм P при этом не выдает никакого значения на выход.
  - Функция $f(n) = 2n$ вычислима. Алгоритм: умножить число 2 само на себя n раз.
  - Функция $f(n) = [\log n]$ (не определенная для $n = 0$) вычислима: Алгоритм взятия логарифма и целой части реализовано во всех языках программирования
- Пример: композиции вычислимых функции вычислимы

$$2^{n2}\ ,\ 2^{2n}, [\log n]^{n}$$

Методологический комментарий: **Разрешимые множества**

- Множество **натуральны чисел** X называется **разрешимым**, если существует *алгоритм*, который по **любому натуральному n** определяет, принадлежит ли оно множеству X.

Определение: множество X разрешимо, если его **характеристическая функция f(n) то есть**

f（n）=（if n E X then 1 else 0 ）вычислима.

Вопрос: существуют ли неразрешимые *множества* ?

Ответ: да, потому, что алгоритмов вычисления характеристических функций разрешимых подмножеств натурального ряда счетное число, а всех подмножеств натурального ряда несчетное число..

Уточнение

- **Уточнение:** Множество $A \subseteq N$ называется разрешимым, если существует алгоритм, который для всякого входа $n \in N$ выдает 1, если $n \in A$, и выдает 0, если $n \notin A$.
- **Определение**. Характеристической функцией множества $A \subseteq N$ называется функция $\chi A : N \to \{0, 1\}$, для которой
$\chi A(n)= 0$, $n \notin A$
$\chi A(n)= 1$, $n \in A$,

- **Лемма** . Множество $A \subseteq N$ разрешимо тогда и только тогда, когда функция χA вычислима.

- **Теорема Поста**: разрешимые множества - это перечислимые множества с перечислимыми дополнениями.

(Множество $A \subseteq N$ разрешимо тогда и только тогда, когда оба множества A и $N \setminus A$ перечислимы)

Методологический комментарий **ПЕРЕЧИСЛИМОЕ МНОЖЕСТВО**

- **Определение** . Множество $A \subseteq N$ называется перечислимым, если существует алгоритм P , который вычисляет все элементы этого множества. Всякий элемент A вычисляется через конечное число шагов работы алгоритма P.
- Замечание 1. Важно, чтобы в последовательности результатов работы алгоритма P ничего, кроме элементов A, не встретилось.
- Замечание 2. Понятие перечислимости более широкое, нежели понятие разрешимости.

- **Лемма** . Если множество $A \subseteq N$ разрешимо, то оно перечислимо.

Итоговые утверждения

- Утверждение . Если множество S перечислимо, то оно является множеством значений некоторой вычислимой функции.
- Утверждение . Если множество S является множеством значений всюду определённой вычислимой функции, то оно перечислимо.

Итак: формальное исчисление - это среда, где выполняются операции над абстракциями

- Арифметика (сложение, умножения чисел) гипотез авс
- Векторная алгебра (конечномерное сложение векторов)
- Функции (бесконечномерные вектора)
- Алгебра Ли (операция коммутирования)
- Аксиома выбора
  - Квайн – программа которая печатает саму себя-
    «**Куайн»** (*квайн*, англ. *quine*) — компьютерная программа, которая выдаёт на выходе точную копию своего исходного текста. Куайны возможны в любом тьюринг-полном языке программирования — как следствие теоремы Клини о рекурсии

РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ РЕИФИКАЦИИ **ПОНЯТИЯ «ВЫЧИСЛИМОСТЬ»**

- машин Тьюринга (А.Тьюринг, 1936 г.);
- машины Поста (Э.Пост, 1943 г.);
- нормальных алгорифмов Маркова (А.А.Марков, 1950);
- МНР-вычислимых функций (Х.Стерджис, 1963)

Если функция не вычислима в соответствии с каким-то из указанных подходов, то она не может быть вычислена в рамках иной другой из указанных формализаций

Формалитзация понятия «алгоритм» позволяют говорить и о существовании алгоритмически неразрешимых проблем.

Феномен рекурсии в теории алгоритмов

- **Тезис Черча-Клини** : класс интуитивно вычислимых функций» совпадает с классом «частично рекурсивных функций»
- Если функция *f(x)* – не является частично-рекурсивной, то она не является интуитивно вычислимой, а потому ее вычисление является «алгоритмически неразрешимой проблемой».
- Факт: среди множества интуитивно вычислимых функций, не нашлось ни одной, о которой можно было бы сказать, что она не принадлежит к классу частично рекурсивных функций.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ВЫЧИСЛИМЫМИ ФУНКЦИЯМИ И ПЕРЕЧИСЛИМЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

Пусть $A \subseteq N$ — некоторое множество натуральных чисел. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1. A перечислимо;
  2. A является областью значений некоторой вычислимой функции;
  3. A является областью определения некоторой вычислимой функции;
- 4. полухарактеристическая функция A

  $\chi(n) = 0$, если $n \in A$,

  $\chi(n)$ не определена, если $n \notin A$.

  вычислима.

из 4 следует 3. Действительно, областью определения функции $\chi(n)$ как раз и является множество A. Раз эта функция вычислима, то A является областью определения вычислимой функции.

из 1 следует 4

из 3 следует 2

из 2 следует 1.

Итак,

- перечислимые множества — это в точности области определения и области значений вычислимых функций. Множество перечислимо тогда и только тогда, когда его характеристическая функция вычислима.
- разрешимые множества являются перечислимыми.
- существуют перечислимые , но неразрешимые множества

Заключение

- **Тезис Тьюринга**. Любой вербальный алгоритм в алфавите *M* может быть реализован некоторой машиной Тьюринга, работающей над алфавитом *M.*
- **Тезис Маркова – принцип нормализации.** Любой вербальный алгоритм в алфавите *M* может быть реализован некоторым нормальным алгорифмом над алфавитом *M.*
- **Тезис Черча-Тьюринга**. Всякая интуитивно вычислимая функция является вычислимой по Тьюрингу.

Теорема . Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ частично рекурсивна тогда и только тогда, когда она вычислима по Тьюрингу.