Санкт-Петербургский
Государственный
Политехнический
Университет

Институт прикладной
математики и механики

Управление научными проектами

(Методы исследовательской работы)

анализ проблемы сложности

14 ноября
2023 г.

Что обсуждали на прошлой лекции:
Принцип множественности моделей В. В. Налимова

В современной науке произошел переход от **изучения хорошо организованных систем** к плохо организованным – **«диффузным» (смешанным) системам.**

В хорошо организованных системах можно было выделить явления или процессы одной физической природы, зависящие от небольшого числа переменных. В этом случае результаты представлялись хорошо интерпретируемыми функциональными связями, которым приписывалась **роль законов природы**.
Если для классической науке был важен **принцип «достаточного основания» Лагранжа**, то в «новой науке» о сложных «смешанных) системах особую роль играет смыслового содержание знаковой системой (текста) **описания такой системы.**

новые принципы (парадигма) компьютерных наук

На основе рассмотрения новых научных задач, связанных изучением сложных систем, с обработкой «больших данных», машинным обучением и искусственным интеллектом, классические подходы к организации компьютерных вычислений, известные как принципы фон Неймана, должны быть модифицированы, так чтобы наделить вычислительные системы способностями к индуктивным выводам и частичной субъектности, а именно:

- принцип однородности памяти – трансформируется в принцип организации вычислений в нейроморфном поле памяти, где хранятся ранее приобретенные ассоциативные знания,
- принцип адресности дополняется принципом гиперконвергентности и ассоциативной маршрутизации,
- принцип программного управления расширяется за счет возможности изменения порядка выполнения команд на основе результатов анализа предшествующих вычислений,
- принцип двоичного кодирования дополняется кодированием категориальных признаков процедуру, которая представляет собой преобразование дескрипторов признаков в численное представление по заданным правилам.

Обсудим, суть обсуждаемых проблем компьютерных наук

«…тем хуже для фактов, если они не укладываются в теорию»

М. Планк

В чем суть теории компьютерных наук: существует то, что может быть вычислено.

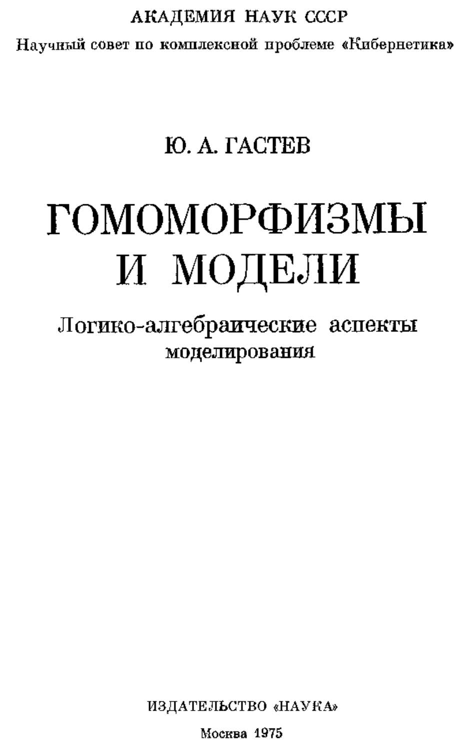
- С точки зрения компьютерных наук любая сущность или объект восприятия может быть материализован с помощью «каскада» вычислительных операций. Если… описание этой сущности мыслимо (thinkable) как конечное целостное множество из интерпретируемых абстарктных понятий, то может быть получена
  - оценка количества операций, которые требуются для получения решения или материализации факта

  Также в рамках принципа «множественности моделей» может быть применен
  - аналоги принципа неопределенности Гейзенберга к характеристики «точность решений/время вычислений;

Модальность логических законов (эпистимическая, темпоральная и др. логики)

могут ставить под вопрос «объективность» вычисленных экспериментов, с точки зрения их своевременности, избыточной сложности и затрат времени

Рекомендовано прочитать



АКАДЕМИЯ НАУК СССР
Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика»

Ю. А. ГАСТЕВ

ГОМОМОРФИЗМЫ
И МОДЕЛИ

Логико-алгебраические аспекты
моделирования

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1975

числа -
«тени»
Реальности

чтобы по
«тени»
«восстановить»
реальность надо
использовать **интуицию**

Под интуицией я подразумеваю **понимание**, настолько отчетливое, что не остается никакого сомнения относительно того, что мы разумеем.

Р. Декарт (1596 – 1650)

By **understanding**, I mean forming a physical picture that **intuitively** feels perfectly clear.

Р. Фейнман (1918-1988

Научная проблема, почему : cogito + compute vs энтропия S=Q/T

В природе действует второй закон термодинамики – энтропия замкнутой системы растет (ее структура разрушается). В компьютерных науках процессы идут «против энтропии», так как обладают свойством интенсиональности, т.е. направленности на «что-то».

Механизм вычислений работает вне зависити от того, существует ли или нет в данный момент реаально то, **что вычисляется**.

В основе «направленности» вычислений лежит феномен **понимания**, который не зависит от того «существует ли то, что мы понимаем». То есть «понимание» есть: 1) реальный, 2) мыслимый в абстрактных понятиях или 3) вымышленный объект.

Итак, какими свойствами должен обладать «объект», чтобы его можно было вычислить ?

1) Объект должен «пониматься» как элемент некоторой **«числовой»** структуры

Является ли сознание (cogito) вычислимым феноменом!?

1. Опыт сознания интегрирован со всем тем, что человек знает о реальности (что реально видел, осязал, слышал или изучал теоретически).
2. Поэтому механизм "опыта сознания" радикально отличается от методов автоматического распознавания образов, реализованных в современной компьютерной технике.
3. Суть отличия в том, что опыт сознания **не сводится к идентификации "математического" объекта** - формального набора заранее заданных параметров или свойств.

Если «вы чему то научились», то полученный опыт (знания) будет интегрирован со всеми видами других знаний и переживаний, хотя доступ к конкретным «знаниям» может быть со временем затруднен

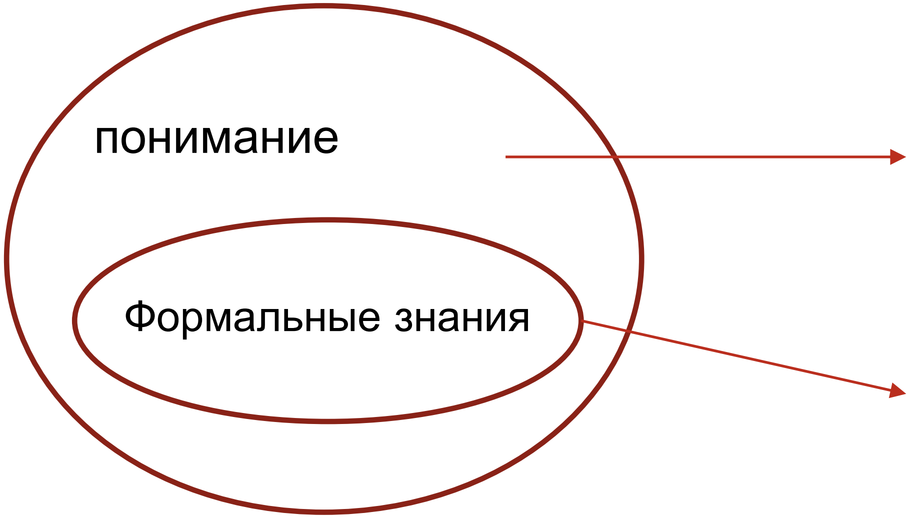
Можно ли такие свойства описать МАТЕМАТИЧЕСКИ ?

Пример

«Сознательный опыт» можно рассматривать как своего рода процесс сжатия информации. «Сознательное» сжатие информации позволяет сформировать «семантический базис» …. пространства понятий, в которое отображаются воспринимаемые (опытные) данные.

Так,
рассмотрим последовательность чисел:
4, 6, 8, 12, 14, 18, 20, 24.... Это бесконечный ряд, определяемый как: нечетные простые числа
3, 5, 7, 11, 17, 19, 23…..
плюс 1.
Такое объяснение не содержит все множество простых чисел, но оно позволяет **точно воспроизводить ряд (вычислять)**, поэтому может рассматриваться как смысловое сжатие информации, полученной в предьявленной последовательности данных .

Теория и задачи компьютерных наук



понимание

Формальные знания

Использование <u>интуитивных</u> представлений о мыслимом объекте

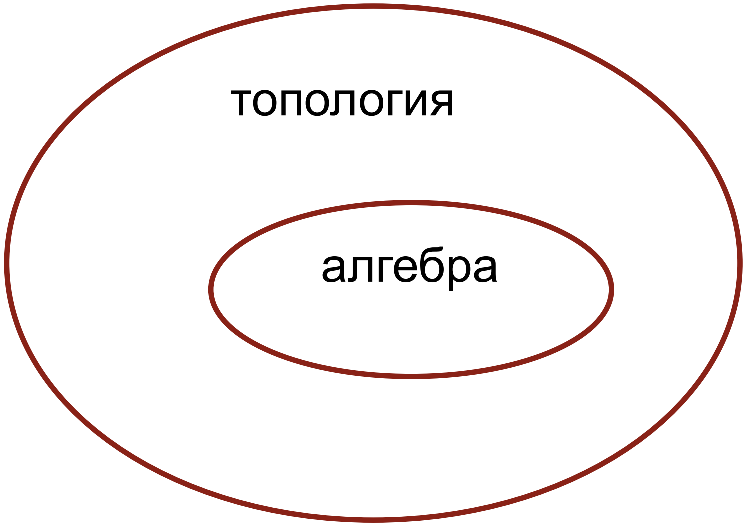
Использование <u>формального</u> описания мыслимого объекта с помощью абстрактных понятий

В компьютерных науках :

- **представление** - непрерывная схематизация взаимодействия субъекта с объектами природы на основе ассоциаций и использования классов эквивалентности.
- **описание** в форме кода исполняемой программы, включающей строгие теоретико-множественные, алгебраические или топологические структуры и операции

Абстракции и их интерпретации

Абстракция непрерывности – основа топологии и восприятия объектов реальности



топологическая алгебра;

алгебраическая топология

Основа вычислений: «универсальность» арифметических абстракций, что является необходимым условием существования «компьютерных» моделей реальности

Абстракция операций – основа логики, алгебры и арифметики и…. проблемы вычислительной сложности описания объектов и процессов Природы.

Категории мышления с позиций сложности вычислений

Ключевой вопрос: Как сформулировать задачу, чтобы она имела «вычисляемое» решение, которое можно не только эффективно вычислить, но и ….. объяснить.

Для ответа на вопрос определяющее значение имеют **категории научного мышления**, которые основаны на том, что

- у любой проблемы есть разные решение (принцип множественности моделей В. В. Налимова)
- решения состоят из последовательных этапов
- ошибки вычислений могут повышать уровень понимания задачи (принцип индукции)

Категории мышления, основанные на вычислениях, включают в себя подходы:

- к исследуемому объекту как - алгебраическому уравнению, дифференциальному уравнению, функции, распределению вероятности
- инвариантность объекта по отношению к той или иной группе преобразований дает информацию об устройстве этого объекта и сложности вычисления его характеристик…..

Итого. Вся сложность вычислений состоит в постановке задачи, а именно какое свойство требуется найти, к какому воздействию задача инвариантна

Контраст причин появления задачи и следствий ее решения

Причины банальны, а следствия загадочны и «замаскированы».

В. Босс

Следствия порождаются весьма «пустяковыми» причинами.

- Так, все законы сохранения физики – следствия различных свойств симметрии, которые можно обнаружить в физическом пространстве.
- В основе любой симметрии лежит **инвариантность по отношению** к той или иной **группе преобразований**: *сдвиг во времени, перемещение и вращение 3D объекта как твердого тела* …

Формально, чтобы совокупность Ф преобразований f: X->X **была группой**, требуется:

1. если f(x), g(x) принадлежат Ф, то и f(g(x)) принадлежит Ф
2. в Ф входит тождественное отображение e(x)=x
3. любое отображение f из Ф имеет f^{-1} ,которое также принадлежит Ф. (не все физические процессы допускают «обращение», например в рамках парадигмы термодинамики имеется «стрела времени», нарушающая симметрию во времени

Примеры «групп»

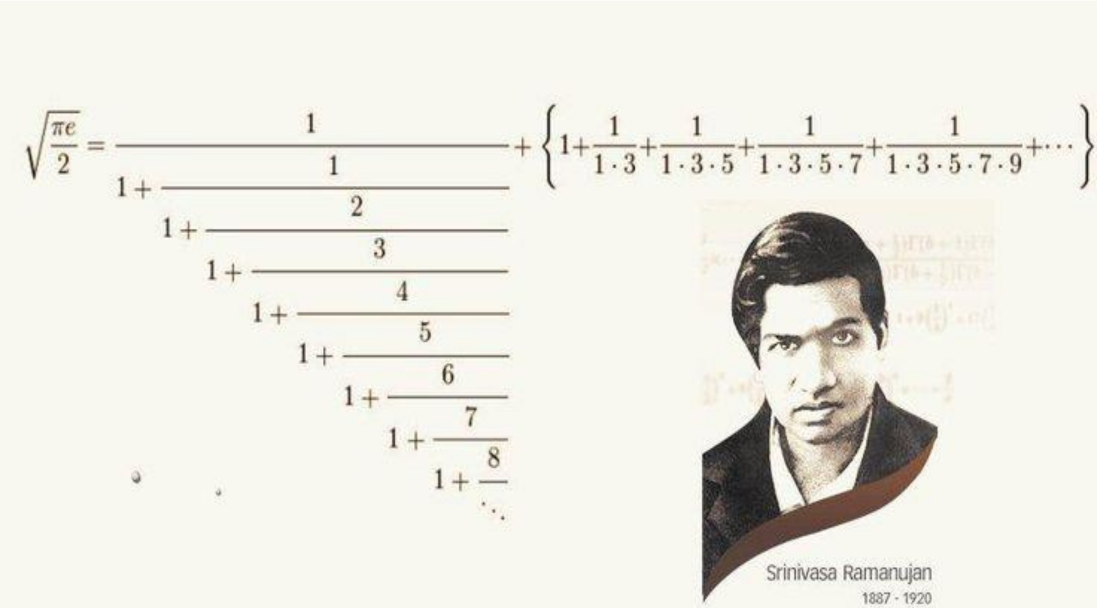
- группа преобразований Лоренца – основа теория относительности
- группа Галуа преобразований алгебраических уравнений – основа решения уравнений в радикалах, полиномиальная арифметика
- группа Ли инвариантных преобразований гладких вещественных или комплексных многообразий

Группу комплексных чисел **a+ib** по умножению эквивалентно заменяет **группа** матриц:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a * \overset{“1”}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} + b* \overset{“i”}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}$$

где $a^2 + b^2 = 1$, а умножение матриц – композиция операторов

Симметрично все, что закономерно, что закономерно – то вычислимо



$$\sqrt{\frac{\pi e}{2}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{7}{1+\cfrac{8}{1+\ddots}}}}}}}}}+\left\{1+\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}+\cdots\right\}$$

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\dots}}}}=3,$$

$$\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+\dots}}}}=4,$$

$$\sqrt{8-\sqrt{8+\sqrt{8-\sqrt{8-\dots}}}}=1+2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9},$$

$$\sqrt{11-2\sqrt{11+2\sqrt{11-2\sqrt{11-\dots}}}}=1+4\sin\frac{\pi}{18},$$

$$\sqrt{23-2\sqrt{23+2\sqrt{23-2\sqrt{23-\dots}}}}=1+4\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}$$

Формулы Рамануджана:

Мир симметричен, любой закон природы и формулы математики свидетельствуют о той или иной инвариантности к изменению внешних условий. В чем причина инвариантных свойств – это групповые свойства преобразований

- движения, сохраняющих расстояние,
- переноса во времени
- зеркального отражения

Но уравнения физики не симметричны относительно свойств «причина/следствие»;

Справа или слева «причина» ?

$mx^{(2)}$ =F

rot E= -a*dH/dt

Знак «=« маскирует ответ.

О пользе абстрагирования

Вопрос: что важнее для вычислений – объект или операции над ним ? Давно замечено, что **аналоги** обычных арифметических операций имеются далеко **за пределами числовых систем**, т].е. умножать и складывать можно

как многочлены, матрицы, …

так и выпуклые тела и пр. объекты реального мира.

Абстрагирование от числовой специфики облегчает «алгебраизацию» наблюдаемых природных явлений, носителями которых может быть:

поле действительных или комплексных чисел, которые являются «единственными конечномерными действительными ассоциативно-коммутативными алгебрами без делителей нуля»;

тело кватернионов, которые являются единственной конечномерной ассоциативной, но не коммутативной алгеброй без делителей нуля….

что позволяет не допускать нелепых обобщений и выбирать «правильные инструменты» для решения прикладных задач.

Абстрагирование – путь к пониманию через вычисления

Понятие «абстрактное натуральное число» – для всех стало банальностью….неким очевидным «кирпичиком» описания физической реальности,….но есть и другие абстракции, например, «мнимая единица», многим не ясно, что это

– фикция, не имеющая физического аналога,
- особая точка функции
- «тень» обратных арифметических операций ?

Суть дела в том, что на определенной стадии манипулирования числами процесс выходит на новый уровень абстракции, фиксируя внимание не на самих числах-объектах, а на операциях с ними. Действия оказываются важнее тех объектов, над которыми они выполняются.

От арифметики над числами к абстрактной алгебре над кольцами телами полями

Можно ли вводить понятие «число», начиная не с натурального ряда и примеров, которые могут наглядно пояснить, в чем суть операций «сложения и умножения» ?
Для этого кроме самого «числа» надо определить свойства операций над ними. Эти операции должны удовлетворять свойствам, известным из арифметики над числами, например:

$a(b+c)=ab+ac$

Именно так поступают в рамках методов «абстрактной алгебры»

Роль вычислительной сложности

Некоторые физические теории невозможны, так как конфликтуют с фундаментальными ограничениями, которые есть следствия принципиальной вычислительной сложности физической реальности…

Следствия теории сложности:

- существует мера вычислительной сложности
- существуют разрешимые и неразрешимые проблемы сложности
- существуют классы сложности P /NP/NP- полные классы
- сложность комбинаторных задач
- Имеют место «фазовые переходы» вычислительной сложности

Теория сложности в аспекте связей между физикой, математикой и компьютерными науками

- Обмена идеями и методами между физикой и компьютерными науками почти не происходит, исключая результаты, связанные с прямым численным моделированием процессов с использованием суперкомпьютеров
- Не смотря на это, те немногие научные результаты, которые были получены в последние несколько десятков лет, приводили к удивительным открытиям в обеих областях.
- Особый интерес имеет обмен идеями и методами между статистической механикой и теорией сложности вычислений.
- Так, рассмотрение физических проблем с позиций необходимых для их решения вычислительных ресурсов (процессорное время, память), уже привело к понятиям полиномиально (легко) и экспоненциально (сложно) решаемых физических проблем.

Формально трудные проблемы, как правило, можно переформулировать и ....легко численно решить.

- Теория сложности основана на оценках, относящихся к наихудшему случаю, который очень часто значительно отличается от типичного случая, усредненного по разумной совокупности экземпляров задач.
- Практика вычислений состоит в том, что трудные проблемы в общем случае, как правило, легко решить, но чтобы получить действительно трудные NP-полные для решения задачи их параметры должны быть тщательно подобраны из множества критических значений.
- При этом, вариация задачи в критической области ее параметров приводит к резким изменения вычислитепльтной сложности решаемой проблемы, что напоминает изменения, связанные с фазовыми переходами в физических системах – **лед-вода-пар**….

Мера сложности алгоритмов

- Понятие вычислительная сложность на практике это мера на множестве вычислительных ресурсов, которые отражают затраты времени, необходимых для решения прикладной проблемы. Однако, величина время существенно зависит от реализации алгоритма, а также от компьютера, на котором работает программа.
- В рамках теория сложности надо, прежде всего ответить на вопрос:
  - Что значит, что рассматриваемая физическая проблема вычислительно не разрешима ?
- Формально, проблема является разрешимой, если она может быть решена с помощью компьютерной программы, написанной на некотором языке программирования.

Временная сложность

- Рассмотрим наихудшую временную сложность T(n) = max t(x), где t(x) – время работы алгоритма для входных данных x , а максимум берется по всем экземплярам задачи размера n.
- Время наихудшего случая является верхней границей для времени работы и основана на единице времени, которая не зависит от тактовой частоты конкретного процессора.
- Такой единицей является время, необходимое для выполнения элементарной операции, такой как сложение двух целых чисел.
- Измерение времени в этом случае означает подсчет количества элементарных операций, выполняемых алгоритмом.
- Далее не будем рассматривать точное число T(n) элементарных операций, а только их асимптотическое поведение T(n) для больших значений n, обозначаемых символами O (g(n))

$$T(n) \le c{*}g(n),\ \text{для}\ n \ge n_0$$

классы сложности

- временная сложность алгоритма является лишь верхней границей для его алгоритмической сложности, которая зависит от n – «размера задачи» .
- Пример. Умножение двух матриц n × n требует n^3 умножений, означает ли это, что задача умножения двух матриц n × n имеет сложность $O(n^3)$?
  - Нет, быстрый алгоритм умножения требует $O(n^a)$, $a<3$. Так «рекордное значение» $a=2.38$.
- Квадратная матрица nxn имеет n^2 элементов и не может иметь меньше элементов. Итак, проблема сложности вычислений зависит от двусмысленного понятия «размера».
- Все проблемы, которые могут быть решены полиномиальным алгоритмом, т.е. алгоритмом с временной сложностью (n^k) для некоторого k, объединяются вместе в класс «разрешимых».
- Проблемы, которые могут быть решены только алгоритмами с временем работы $O(2^n)$ или $O(n!)$, объединяются в один класс и называются «неразрешимых».

Полиномиальный и экспоненциальный аспект сложности

- С практической точки зрения
  - экспоненциальный алгоритм O(2^n) означает жесткий предел величины n доступного размера проблемы, решение которой возможно на имеющемся оборудовании.
  - полиномиальный алгоритм O(n) или O(n^2) гораздо менее драматично влияет на размер проблемы и может быть легко компенсировано модернизацией существующего оборудования
- Хотя алгоритм (n^{100}) превосходит алгоритм (2^n) только для задач, которые могут никогда не возникнуть в конкретном приложении.
- Полиномиальный алгоритм для задачи обычно сопровождается пониманием сути решаемой задачи, что позволяет найти полиномиальный алгоритм с малой степенью (n^k), $k = 1, 2,3$. Полиномиальные алгоритмы с $k > 10$ встречаются редко и возникают в довольно эзотерических случаях.

Пример. Задача коммивояжера - Неразрешимые проблемы

Задача. Спланировать маршрут для коммивояжера, который должен посетить n городов. Дана карта со всеми городами и расстояниями между ними. Вопрос. В каком порядке коммивояжер должен посетить города, чтобы минимизировать общее расстояние, которое ему придется преодолеть.

На карте задается матрица расстояний (dij), где dij обозначает расстояние между городом номер i и городом номер j.

Маршрут задается циклической перестановкой : [1 . . . n] 7→ [1 . . . n], где (i) обозначает преемника города i, и ваша задача может быть определена как:

Дана матрица расстояний n × n с элементами dij ≥ 0. Найдите циклическую перестановку

p: [1 . . . n] → [1 . . . n], которая минимизирует

$$c_n(p) = \sum_{i=1}^{n} d_{ip(i)}$$

Можно найти хорошее решение для данной задачи ?

- В задаче коммивояжера существует (n - 1)! циклических перестановок, вычисление длины одного маршрута может быть выполнено за время O(n), следовательно, исчерпывающий поиск имеет сложность O(n!).
- Итого, оптимальный маршрут можно вычислить для «маленьких» значений n . (50! > число атомов во Вселенной)
- Существует ли идея, которая дает возможность быстро найти оптимальное решение ? **Этого пока никто не знает! Полиномиальный алгоритм для этой задачи до сих пор не найден**.
- Однако, есть несколько эффективных (т.е. полиномиальных) алгоритмов, которые позволяют **найти «хорошие» решения**, но не гарантируют получение оптимума. Согласно определению, эта задача формально является неразрешимой.
- **Вопрос: нужны ли в принципе «оптимальные» решения ? .**